Lezione 12 – **Continuità**

12.1 Un problema aperto

La funzione $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ è definita per $x \neq 0$, si è dimostrato che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, è possibile definire una funzione che sia definita in R in modo naturale?

Definizione 12.1

$f: X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0 \in X$ punto di accumulazione per X, se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ e $f(x_0)=l$ allora la funzione si dice **continua in x_0**.

Se $x_0 \in X$ è **punto isolato** si assume che la funzione sia **continua in x_0**.

Se f è continua in ogni punto di un intervallo (a,b) allora di dice che f è **continua in (a,b).**

Esempio 12.1

1) La funzione $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 \text{ se } x>0\\ -1 \text{ se } x<0\end{cases}$ è definita e continua per ogni $x_0 \in R_0$.

2) La funzione $f(x)=|x|=\begin{cases}x \text{ se } x\geq 0\\ -x \text{ se } x<0\end{cases}$ è definita e continua per ogni $x_0 \in R$; infatti $f(0)=0$,

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0=f(0)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0=f(0)$

3) La funzione $f(x)=\begin{cases}x^3 \text{ se } x\geq 1\\ \sqrt{x} \text{ se } x<1\end{cases}$ è definita e continua per ogni $x_0 \in R$; infatti $f(1)=1$,

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^3=1=f(1)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x}=1=f(1)$.

4) La funzione $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} \text{ se } x\neq 0\\ 0 \text{ se } x=0\end{cases}$ è continua per ogni $x \in R$; infatti $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$.

Definizione 12.2

$f: X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0 \in X$ punto di accumulazione per X, se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ e $f(x_0)\neq l$ oppure $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ oppure $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste allora la funzione si dice **discontinua in x_0**.

Esempi 12.2

1) La funzione $f(x)=sign(x)=\begin{cases}1 \text{ se } x>0\\ 0 \text{ se } x=0\\ -1 \text{ se } x<0\end{cases}$ è definita per ogni numero reale, è continua per $x_0 \in R_0$ ma discontinua per $x_0=0$; infatti $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste.

2) La funzione $f(x)=\begin{cases}\ln|x| \text{ se } x\neq 0\\ 1 \text{ se } x=0\end{cases}$ è definita per ogni numero reale, continua per ogni $x_0 \in R_0$ ma discontinua per $x_0=0$; infatti $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

3) La funzione $f(x)=\begin{cases}\ln|x+1| \text{ se } x\neq 0\\ 1 \text{ se } x=0\end{cases}$ è definita per ogni numero reale, continua per ogni $x_0 \in R_0$ ma discontinua per $x_0=0$; infatti $f(0)=1, \lim_{x\to 0} f(x)=\ln(1)=0\neq f(0)$.

Definizione 12.3
$f: X\to R,\ X\subseteq R,\ x_0\in X$ punto di accumulazione per X,
se esiste $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$ e $f(x_0)=l$ allora la funzione si dice **continua da destra in x_0**
se esiste $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$ e $f(x_0)=l$ allora la funzione si dice **continua da sinistra in x_0**.
Se *f* è **continua in (*a*,*b*)** ed è **continua da sinistra in *a*** e **continua da destra in *b*** si dice che *f* è **continua nell'intervallo chiuso [*a*,*b*]**.

Esempio 12.3
1) La funzione $f(x)=\begin{cases}x & \text{se } x\in[0,1)\\ 2-x & \text{se } x\in[1,2]\end{cases}$ è definita e continua per ogni $x\in[0,2]$.

2) La funzione $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ è definita e continua per ogni $x\in[-2,2]$.

3) La funzione $f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & \text{se } x\neq 1\\ 1 & \text{se } x=1\end{cases}$ è continua per ogni $x\in R$; infatti

$$\lim_{x\to 1^+} x-\frac{(x-1)^2}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+} x-\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+} x-x+1=1$$

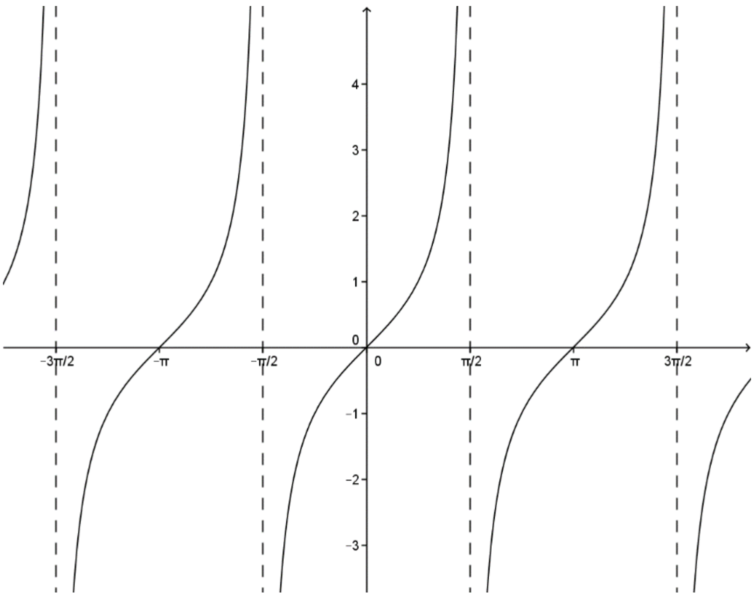
$$\lim_{x\to 1^-} x-\frac{(x-1)^2}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-} x-\frac{(x-1)^2}{-x+1}=\lim_{x\to 1^-} x+x-1=1$$

Teorema 12.1
Tutte le funzioni elementari: $x^\alpha, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \tan x$ sono continue nel loro dominio.

Teorema 12.2
Se $f,g: X\to R,\ X\subseteq R$ sono continue in $x_0\in X$ allora sono continue:
1. $k\, f(x),\quad k\in R$
2) $(f+g)(x)$
3) $(f\cdot g)(x)$
4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ se $g(x_0)\neq 0$
5) $|f(x)|$

Esempio 12.4

1) La funzione $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ è definita e continua per ogni $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$; infatti è il rapporto di due funzioni continue e per $x \to \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2} \pm\dfrac{5\pi}{2}, \ldots$ il limite è infinito perché il denominatore tende a 0 mentre il numeratore tende a 1 o -1.



Teorema 12.3

Se $f : X \to R,\ X \subseteq R$ è continua in $x_0 \in X$ e $g : Y \to R$ è continua in $y_0 = f(x_0) \in Y$, allora $g \circ f : X \to R$ è continua in $x_0 \in X$.

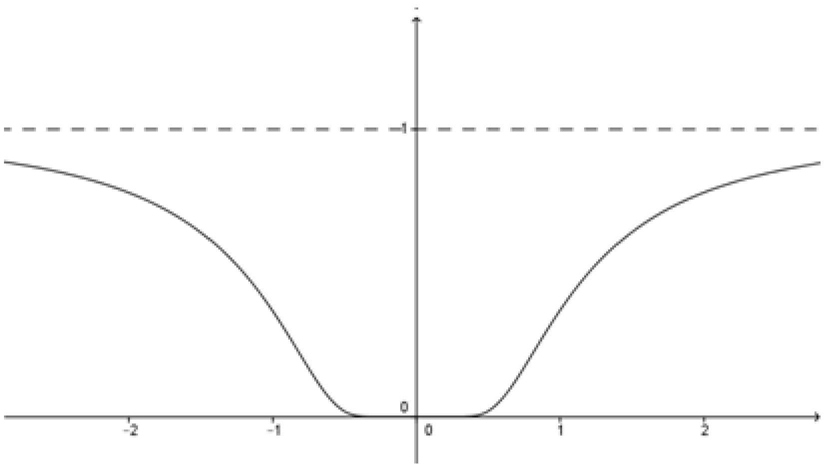
Esempio 12.5

La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è definita e continua per ogni $x \in R$.

$\lim\limits_{x \to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ quindi $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0 = f(0)$.

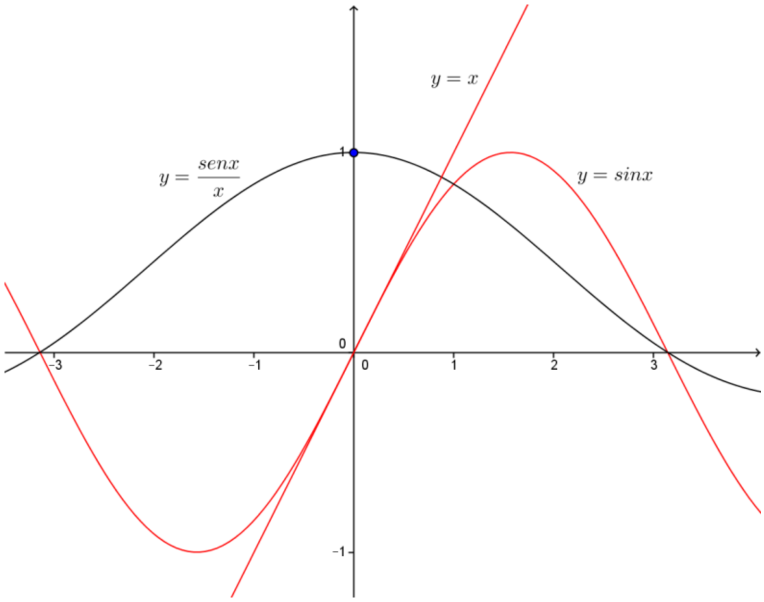
Per disegnare il grafico è utile calcolare il limite per $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0^-$ quindi

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{t \to 0^-} e^t = 1^-$ quindi y=1 è asintoto orizzontale per $x_0 \to \pm\infty$.



Applicazione

Poiché $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ si può definire $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$ definita e continua per ogni $x_0\in R$



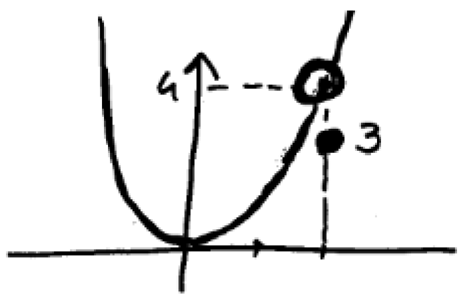
12.2 Un'altra funzione costo nel tempo continuo

Nel problema del break even si pensi ad un orizzonte temporale di 12 mesi e un andamento diverso dei costi di produzione nei due intervalli [0,5] e (5,12], per esempio si ipotizza che $f(t)=\begin{cases}C_f+t & \text{se } 0\le t\le 5\\ C_f+6 & \text{se } 5<t\le 10\end{cases}$. Ci si chiede quali sono le caratteristiche della funzione f.

Punti di discontinuità eliminabile

Se $f:X\to R$, $X\subseteq R$ e x_0 è punto di accumulazione per X se

- $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=l$ finito ma $\begin{cases}x_0\in X, l\neq f(x_0)\\ x_0\notin X, x_0\in FX \text{ (frontiera di } X)\end{cases}$ allora x_0 è un punto di discontinuità di **III° specie .**

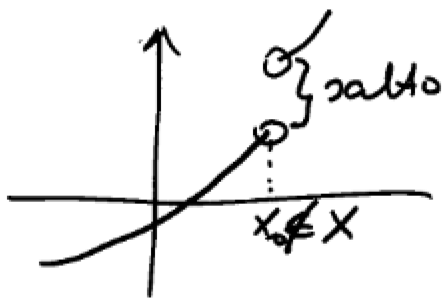


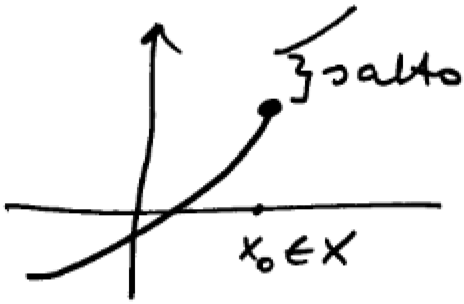
Una discontinuità si dice **eliminabile** se si può definire una funzione

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{se } x\in X, x\neq x_0\\ l & \text{se } x=x_0\end{cases}$$ continua per ogni $x\in X$.

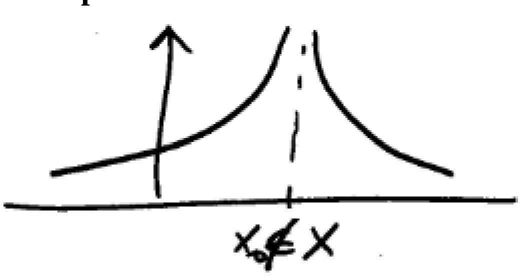
Nota
In molti testi si introducono altri due tipi di discontinuità dette di **I° e II° specie che** sono **non eliminabili** mentre la discontinuità **eliminabile** è detta di **III° specie.**

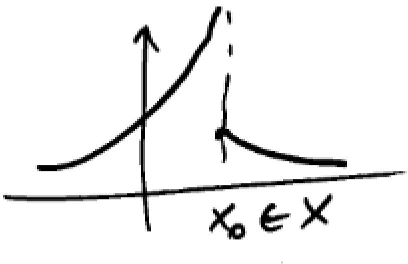
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ entrambi finiti allora x_0 è un punto di discontinuità di **I° specie**





- almeno uno dei limiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ è $\pm\infty$ o non esiste allora x_0 è un punto di discontinuità di **II° specie**





Esempi 12.6

1. La funzione $f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$ è continue per ogni $x \in R_0$, $x = 0$ è punto di accumulazione per R_0 ed punto di discontinuità non eliminabile (I° specie); infatti $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.
2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua per ogni $x \in R_0$, $x = 0$ è punto di discontinuità non eliminabile (I° specie) per qualunque valore di *a*; infatti $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.
3. La funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è definita e continua per ogni $x \neq 0$, il punto $x = 0$ è punto di discontinuità eliminabile (III° specie); infatti $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$, per eliminare la discontinuità basta considerare la funzione $g(x) = |x|$.
4. La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è definita e continua per ogni $x \in R_0$, il punto $x = 0$ è punto di discontinuità non eliminabile (II° specie); infatti $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$, quindi la funzione è continua da sinistra ma non è continua.

5. La funzione $f(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0$ è definita e continua per ogni $x\in R_0$, il punto $x=0$ è punto di discontinuità non eliminabile (II° specie); infatti $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

6. La funzione $f(x)=\frac{x^2+x-2}{|x-1|}, x\neq 1$ è definita e continua per ogni $x\in R\setminus\{1\}$, il punto $x=1$ è punto di discontinuità non eliminabile (I° specie); infatti

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+2)=3 \text{ e}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{-x+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)}=-\lim_{x\to 1^+}(x+2)=-3.$$

Teorema 12.4 di Weierstrass
Se $f: X\to R,\ X\subseteq R$ è continua per ogni $x\in X$ compatto (insieme chiuso e limitato) allora è limitata in X e ammette massimo e minimo globali.

Esempio 12.6

1) $f(x)=e^{-x^2}, x\in[-a,a], a\in R^+$ è continua (composta di funzioni continue) in $[-a,a]$ chiuso e limitato (compatto) quindi per il teorema di W. è limitata e ha Max e Min che , in questo caso, conoscendone il grafico, si possono determinare Max f =1 e Min f = e^{-a^2} .

2) $f(x)=e^{-x^2}, x\in R$ è continua (composta di funzioni continue) in R non chiuso e limitato (compatto) quindi non si può applicare il teorema di W. ; in questo caso, conoscendone il grafico, si può dire che f è comunque limitata e Max f =1 e Inf f = 0 ma non esiste Min$f$.

3) $f(x)=(x^2-1)(x^2-4), x\in[-2,2]$ è continua (composta di funzioni continue) in $[-2,2]$ chiuso e limitato (compatto) quindi per il teorema di W. è limitata e ha Max e Min; in questo caso, conoscendone il grafico, si può determinare Max f =4 ma, come osservato in precedenza, non si può dire quanto vale Min$f$.

12.2 Applicazione alla nuova funzione costo nel tempo continuo

La funzione $f(t)=\begin{cases} C_f+t & \text{se } 0\leq t\leq 5 \\ C_f+6 & \text{se } 5<t\leq 10\end{cases}$

1. f è continua per ogni $t\neq 5$, ha una discontinuità di I° specie (non eliminabile) per t = 5 ; infatti $f(5)=C_f+5, \lim_{t\to 5^-} f(t)=C_f+5\neq \lim_{t\to 5^+} f(t)=C_f+6$.
2. max f = C_f+6, min f = C_f . Si osserva che in questo caso il teorema di Weierstrass non è applicabile perché, pur essendo il dominio [0,10] compatto, la funzione non è continua per ogni $t\in[0,10]$. Tuttavia esistono sia max f che min f; infatti la condizione di continuità in X compatto è solo sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di max f e min f.
3. Un'ultima osservazione che servirà in seguito. Come visto nella lezione 11, fissato un valore di $t=t_0$ e un incremento h della variabile t, il corrispondente incremento $\Delta(h)=f(t_0+h)-f(t_0)$ e il "rapporto degli incrementi" è

$$\frac{\Delta(h)}{h}=\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

Se consideriamo il punto t=5 il "rapporto degli incrementi" è

$$\frac{\Delta(h)}{h}=\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

Per calcolare il limite del rapporto per $h \to 0$ bisogna distinguere i casi h>0 e h <0 (si ricordi che il caso h=0 non va considerato nel limite).

Caso 1 : h<0

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\Delta(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(C_f+5+h)-(C_f+5)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Caso 2 : h>0

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Delta(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(C_f+6)-(C_f+5)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} = -\infty$$

In questo caso il numeratore **non è infinitesimo** quindi il rapporto tende a -∞ !!!!!

In conclusione, se si considera un intorno circolare di t=5 non si può determinare "la velocità di crescita" della funzione costo; infatti nel punto 5 la funzione costo è discontinua.

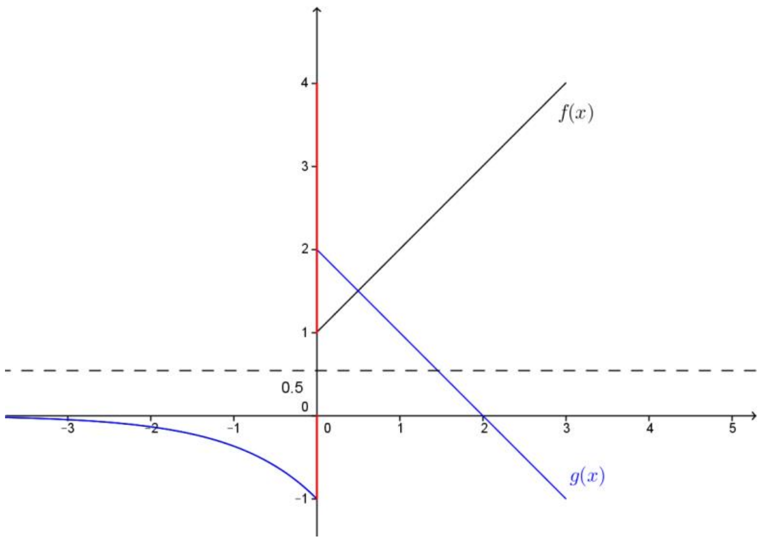
Teorema 12.5 di Darboux

Se $f : X \to R,\ X \subseteq R$ è continua per ogni $x \in X$ compatto allora assume in almeno un punto di X ognuno dei valori compresi fra min f e max f ossia $\forall y \in [\min f, \max f]\ \exists x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Esempio 12.7

1. $f(x) = e^{-x^2}, x \in [-2,2]$, come osservato nell'Es.12.6 1), è continua in $[-a,a]$ chiuso e limitato e Max f =1 e Min f = e^{-4} quindi $\forall y \in [e^{-4},1]\ \exists x \in X$ tale che $f(x) = y$.

2. $f(x) = \begin{cases} -e^x & \text{se } -3 \le x \le 0 \\ x+1 & \text{se } 0 < x \le 3 \end{cases}$ ammette Max f =4 e Min f = -1 ma non è continua in $[-3,3]$; il teorema di Darboux non è applicabile; infatti dal grafico (in nero) si vede che, per esempio, non esiste nessuna controimmagine di $y = 0.5 \in [-1,4]$.



3. $g(x) = \begin{cases} -e^x & \text{se } -3 \le x \le 0 \\ -x+2 & \text{se } 0 < x \le 3 \end{cases}$ ammette Max f =2 e Min f = -1 ma non è continua in $[-3,3]$; il teorema di Darboux non è applicabile; tuttavia dal grafico (in blu) si vede che esiste una controimmagine di qualunque $y \in [-1,2]$.

Si osserva che nel caso 2 in cui il teorema di Darboux non è applicabile Im $f = [-1,0] \cup [1,4]$ che non è un intervallo mentre nel caso 3 Imf =[-1,2] che è un intervallo.

Teorema 12.5 degli zeri

Se $f : X \to R,\ X \subseteq R$ è continua per ogni $x \in [a,b] \subset X$ e $f(a)$>0 e $f(b)$<0 ossia $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi allora esiste almeno un punto di $x_0 \in (a,b)$ per cui vale $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione

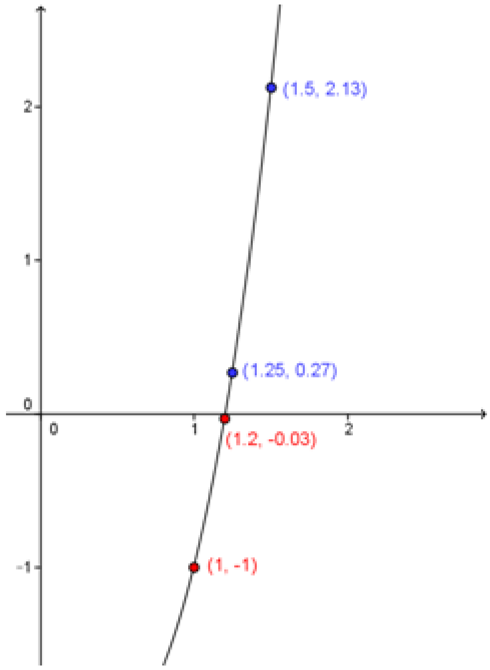
Poiché $\min f \le f(b) < 0, \max f \ge f(a) > 0$ si ha che $0 \in [\min f, \max f]$ e per il teorema di Darboux $\exists x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Osservazione

x_0 è tale che $f(x_0) = 0$ quindi è una delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ e, poiché $x_0 \in (a,b)$, si può considerare a un'approssimazione per difetto e b un'approssimazione per eccesso di tale soluzione.

Esempio 12.6

Si deve risolvere l'equazione $x^3 + x^2 - x - 2 = 0$ per la quale le tecniche normalmente usate non danno risultati.
Si può ragionare così: sia $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ quindi l'equazione diventa $f(x) = 0$ e il problema diventa "stabilire dove il grafico di *f* interseca l'asse *x* ".



Si osserva che $f(1) = -1, f(1.5) = 2.13$ quindi nell'intervallo [1,1.5] è applicabile il teorema degli zeri e si può dire che 1 è una approssimazione per difetto e 1.5 è una approssimazione per eccesso di una delle soluzioni x_1 e si può scrivere $1 < x_1 < 1.5$ perciò $x_1 = 1, \ldots$.
Procedendo in questo modo per intervalli sempre più piccoli si ottengono approssimazioni sempre più precise della soluzione.
Per esempio si osserva che $f(1) = -1, f(1.25) = 0.27$ quindi l'approssimazione per eccesso è anche 1.25, inoltre si osserva che $f(1.2) = -0.03, f(1.25) = 0.27$ quindi l'approssimazione per difetto è anche 1.2.
In conclusione si può dire che $1.2 < x_1 < 1.25$ e anche $x_1 \cong 1.2$ con un'approssimazione di 0.05.

Questioni chiuse

1) L'ultimo calcolo si può fare anche se *h*<0?
   SI, abbiamo visto che si può considerare il limite del rapporto fra incrementi sia per $h \to 0^+$ che per $h \to 0^-$.
2) E' sempre vero che il rapporto di incrementi è una forma di indecisione per $h \to 0$?
   NO, in generale non è vero, nell'Applicazione 12.2 abbiamo visto che il limite del rapporto fra incrementi per $h \to 0^+$ non è una forma di indecisione
3) Cosa succede se $\Delta(h)$ non è infinitesimo?
   Nell'Applicazione 12.2 abbiamo visto che il limite del rapporto fra incrementi può essere $-\infty$.

Questioni aperte

- Cosa rappresenta geometricamente il $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta(h)}{h}$?
- Si è dato un nome al valore del $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta(h)}{h}$?
- C'è una relazione fra l'esistenza del $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta(h)}{h}$ e la continuità di *f*?