Lezione 13 – **Concetto di derivata**

13.1

1) Come varia una funzione nel tempo?

Sia funzione $f(t)$ con $t\in[0,+\infty)$ una funzione che descrive l'andamento di f in funzione del tempo t. Ci si chiede: "Come è possibile descrivere e quindi determinare l'andamento puntuale di f cioè come si può caratterizzare la "velocità istantanea" al tempo $t = t_0$ fissato?".

2) Come varia una funzione costo in rapporto alla quantità prodotta?

Nel caso della funzione costo $\boldsymbol{S=S(q)}$ non interessa solo quanto vale S per un determinato valore della quantità prodotta q_0 , ma interessa il valore di $\Delta S = S(q)-S(q_0)$ (**variazione di $\boldsymbol{S}$**) in rapporto ad una **variazione della quantità prodotta** $\Delta q = q - q_0$.

Definizione 13.1

Sia $f : I \to R,\ x_0 \in I = (a,b) \subseteq R$, I intervallo aperto, sia $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ il rapporto fra gli incrementi detto **rapporto incrementale**:

se esiste $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$ finito allora f si dice **derivabile in $\boldsymbol{x_0}$** e il limite l si dice **derivata di $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x_0}$** indicata con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x_0),\ D(f(x)),\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\ y'(x_0),\ y_x'(x_0)$$

Se f è derivabile per ogni $x \in I$ si dice **derivabile in $\boldsymbol{I}$.**

Esempi 13.1

1) Sia $f(x) = 2x^2$, si vuole calcolarne la derivata per $x = 1$.

Si calcola il rapporto incrementale: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{2(1+h)^2-2}{h} = \dfrac{2h^2+4h}{h}$.

Si calcola il limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2h+4) = 4$ quindi f è derivabile per $x = 1$ e $f'(1) = 4$.

In generale f è derivabile $\forall x \in R$; infatti $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{2(x+h)^2-2x^2}{h} = \dfrac{2h^2+4xh}{h}$ e

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+4xh}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2h+4x) = 4x$ quindi $f'(x) = 4x$.

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ è continua per ogni $x \in R$ e derivabile per ogni $x \neq 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h} \text{ non esiste.}$$

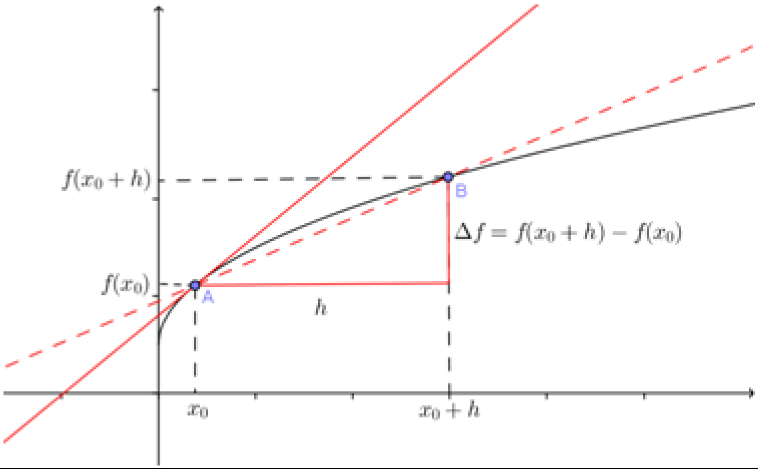
3) La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ è continua e derivabile per ogni $x \in R$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0 .$$

Interpretazione geometrica della derivata

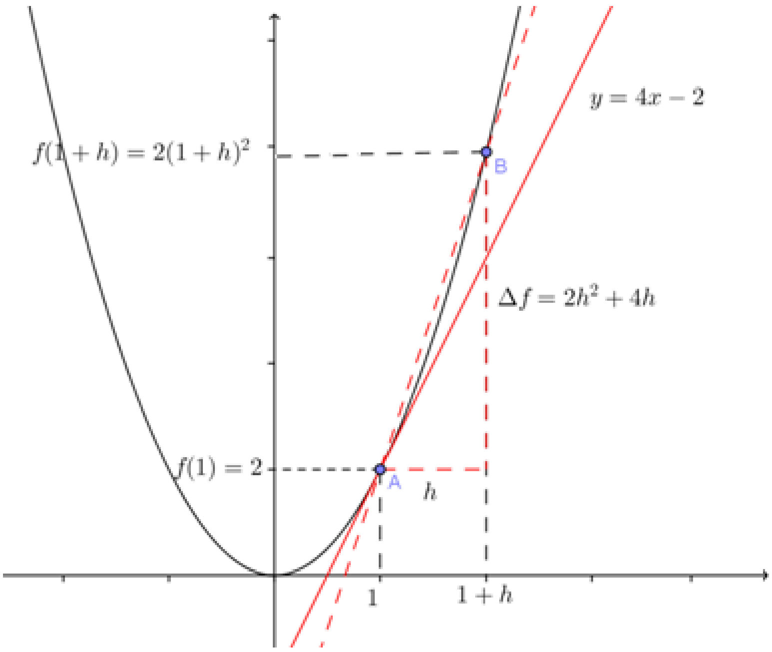
Il **rapporto incrementale** è il coefficiente angolare della retta per i punti $A=(x_0, f(x_0))$ e $B=(x_0+h, f(x_0+h))$ ossia la **retta secante** il grafico di *f* nei punti A e B (in figura rossa tratteggiata).

Se esiste $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ finito tale limite è il coefficiente angolare di una retta che chiameremo **retta tangente al grafico di *f* nel punto A** (in figura rossa continua)**.**



Esempi 13.2

1) Sia $f(x)=2x$, in questo caso il rapporto incrementale è 2, costante per qualunque valore di *x*; infatti la tangente in ogni punto del grafico di *f* è la retta di equazione *y*=2*x* il cui coefficiente angolare è 2, quindi $f'(x)=2\ \forall x\in R$.
2) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)=2x^2$ nel punto (1,2).
   Poiché $f'(1)=4$ (vedi Es.13.1.1), il coefficiente della retta tangente è *m* = 4 quindi la sua equazione sarà: *y* = 4*x* + *q*. Imponendo alla retta di passare per il punto (1,2) si ottiene 2=4+*q* quindi *q* = -2.
   In conclusione la retta tangente nel punto (1,2) ha equazione *y* = 4*x* -2.



Definizione 13.2

Sia $f: I \to R,\ x_0 \in I = (a,b) \subseteq R$, I intervallo aperto,

se esiste $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f_+'(x_0)$ finito allora *f* si dice **derivabile in x_0** da destra

se esiste $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f_-'(x_0)$ finito allora *f* si dice **derivabile in x_0** da sinistra

***f* è derivabile in x_0 se e solo se esistono $f_+'(x_0)$ e $f_-'(x_0)$ e coincidono**

Esempi 13.2

1) La funzione $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$ è definita e continua per ogni $x \in R$ e derivabile per ogni $x \in R_0$ infatti $f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ ma $f_+'(x_0) = 1$ è diverso da $f_-'(x_0) = -1$ quindi *f* non è derivabile per $x = 0$.

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \qquad\qquad \text{se } x = 0 \end{cases}$ è definita e continua per ogni $x \in R$ e derivabile per ogni $x \in\neq 1$; infatti $f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x > 1 \\ 2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$ $f_-'(1)$ e $f_+'(1)$ esistono finiti ma sono diversi

$$f_+'(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + h - \frac{h^2}{|h|} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h-h}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0}{h} = 0 \text{ e}$$

$$f_-'(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + h - \frac{h^2}{|h|} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h+h}{h} = 2$$ quindi *f* non è derivabile per $x = 1$.

Teorema 13.1

Sia $f: X \subseteq R \to R,\ x_0 \in X$, se *f* è **derivabile in x_0** allora *f* è **continua** per $x = x_0$.

Dimostrazione

Se *f* è **derivabile in x_0** allora

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} h = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \lim_{h \to 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$ quindi

$\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ quindi *f* è continua in x_0.

Osservazione importante

Il teorema fornisce una **condizione sufficiente** affinché una funzione sia continua, tale condizione però **non è necessaria**, possono esiste funzioni continue ma non derivabili. Tuttavia, in quanto condizione necessaria, la continuità può essere verificata per escludere la derivabilità.

Esempio 13.3

1) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ è **derivabile** per ogni $x\in R$; infatti è sicuramente derivabile per $x\neq 0$, inoltre si è dimostrato che è continua anche per $x=0$ (vedi Es.12.5) quindi può essere derivabile anche per $x=0$.

Per verificare la derivabilità per $x=0$ si utilizza la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^2}h=0 \text{ poiché } \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^2}=\lim_{t\to+\infty}te^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0.$$

Teorema 13.2 (Programma avanzato)

Sia $f: X\subseteq R\to R,\ x_0\in X$, se f è **derivabile in x_0** e **invertibile in $I(x_0)$, intorno di** x_0, e $f'(x_0)\neq 0$ allora la sua inversa f^{-1} è **derivabile nel punto** $y_0=f(x_0)$ e $D\left(f^{-1}(y_0)\right)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Esempio 13.4

$f(x)=e^x$ è **derivabile** per ogni $x\in R$ ed è anche invertibile $f^{-1}(x)=\ln x$ definita in R^+_0, la sua derivata in un punto $y_0=f(x_0)$ è $D\left(f^{-1}(y_0)\right)=\dfrac{1}{y_0}$.

Se $x_0=0, y_0=e^0=1\ \ f^{-1}(1)=D(\ln x)_{x=1}=1.$

Se $x_0=1, y_0=e^1=e\ \ f^{-1}(e)=D(\ln x)_{x=e}=\dfrac{1}{e}.$

Punti di non derivabilità

Qualora una funzione sia continua in un punto x_0 ma non sia derivabile per il punto **(x_0,$f(x_0)$)** si possono verificare diversi casi:

- **punto angoloso**: esistono le derivate destra e sinistra, di cui almeno una finita, e **sono diverse**
$$f_+'(x_0)\neq f_-'(x_0)$$
- **cuspide**: esistono le derivate destra e sinistra infinite e **sono diverse**
$$f_+'(x_0)=+\infty,\ f_-'(x_0)=-\infty \quad \textbf{cuspide verso il basso}$$
$$f_+'(x_0)=-\infty,\ f_-'(x_0)=+\infty \quad \textbf{cuspide verso l'alto}$$
- **punto a tangente verticale**: esistono le derivate destra e sinistra infinite e **sono uguali**, il tal caso nel punto si ha un cambio di concavità si dice *punto di flesso a tangente verticale*
$$f_+'(x_0)=+\infty,\ f_-'(x_0)=+\infty \quad \textbf{flesso ascendente}$$
$$f_+'(x_0)=-\infty,\ f_-'(x_0)=-\infty \quad \textbf{flesso discendente}$$

Esempi 13.5

1. $f(x)=|x|$ per x=0 è **continua** ma **non derivabile**, $f_+'(0)=1,\ f_-'(x_0)=-1.$

Il punto (0,0) è punto angoloso.

2. $f(x)=\sqrt{|x|}$ per x=0 è **continua** ma **non derivabile**, $f_+'(0)=+\infty,\ f_-'(x_0)=-\infty$.

Il punto (0,0) è cuspide.

3. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ per x=0 è **continua** ma **non derivabile**, $f_+'(0)=+\infty$, $f_-'(x_0)=+\infty$.
Il punto (0,0) è punto di flesso ascendente.

4. $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ per x=0 è **continua** ma **non derivabile**, $f_+'(0)=-\infty$, $f_-'(x_0)=-\infty$.
Il punto (0,0) è punto di flesso discendente.

5. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+b}{x^2-1} & \text{se } x<0, x\neq -1 \\ e^{-x}+1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$ è **derivabile** per ogni $x\in R\setminus\{-1,0\}$.

Studiamo la continuità:

per $x\in(-\infty,-1)$, $x\in(-1,0)$ e per $x\in(0,+\infty)$ f è continua;

per $x=-1$ si osserva che

se $a=1\wedge b=1$ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$ quindi f è continua

se $a\neq 1\vee b\neq -1$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax+b}{x^2-1}=\pm\infty$ quindi f ha una discontinuità di II° specie

per $x=0$ si osserva che $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax+b}{x^2-1}=-b$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}+1=2$ quindi

se $b=-2$ f è continua

se $b\neq -2$ f ha una discontinuità di I° specie (non eliminabile).

Studiamo la derivabilità:

per $x\in(-\infty,-1)$, $x\in(-1,0)$ e $x\in(0,+\infty)$ f è derivabile;

per $x=-1$ si osserva se $a=1\wedge b=1$ la funzione è $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ derivabile, in tutti gli altri casi non può esserlo in quanto non è continua.

per $x=0$ si osserva che f è continua solo se $b=-2$ ossia $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-2}{x^2-1} & \text{se } x<0, x\neq -1 \\ e^{-x}+1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$ e può essere derivabile, in tutti gli altri casi non può esserlo.

Verifichiamo se per $b=-2$ esiste $f'(0)$:

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{ah-2}{h^2-1}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah-2h^2}{h(h^2-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{a-2h}{h^2-1}=-a$$

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-1}{h}=-1$$

quindi $f'(0)$ esiste, uguale a -1, solo se $a=1\wedge b=-2$ ossia $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-1} & \text{se } x<0, x\neq -1 \\ e^{-x}+1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$

In conclusione:

- per $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$, f è continua e derivabile per ogni valore a e b;
- per $x=-1$ f è continua e derivabile solo se $a=1\wedge b=1$
- per $x=0$ f è continua solo se $b=-2$ e derivabile solo se $a=1\wedge b=-2$.

13.1 Applicazione

1) Fissato un incremento h, si può considerare il **rapporto incrementale di f nel punto t_0 relativo all'incremento h ,** tale rapporto descrive come varia f nell'intervallo di tempo h cioè è la **velocità media** in tale intervallo. Se la funzione f è continua per $t=t_0$ è possibile calcolarne la derivata come limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ che quindi rappresenta la **velocità di istantanea**.

2) La variazione della funzione costo $S(q)$ in rapporto all'incremento di quantità prodotta può essere considerato per incrementi discreti di q ossia $q \in N$ oppure per q variabile continua ossia $q \in R$.

Nel ***caso discreto*** ($q \in N$) il minimo incremento è se h=1 ossia $q = q_0 + 1$ e il rapporto incrementale $\frac{\Delta S}{\Delta q} = \frac{S(q) - S(q_0)}{q - q_0}$ coincide con la variazione $\Delta S = S(q_0 + 1) - S(q_0)$ detto **costo marginale unitario** corrispondente al costo di un'unità aggiuntiva prodotta, cioè alla variazione nel costo che si verifica quando si varia di un'unità la quantità prodotta.

Nel ***caso continuo*** ($q \in R^+$) si ha $\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta q} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{S(q) - S(q_0)}{\Delta q} = S'(q_0)$ detto **costo marginale**.

Si osservi che in ambito economico in entrami i casi si usa il termine costo marginale pur trattandosi in generale di due concetti diversi.

Questioni chiuse

1) Cosa rappresenta geometricamente il $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta (h)}{h}$?

   $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta (h)}{h} = f'(t_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(t_0, f(t_0))$ ossia $f'(t_0) = \tan \alpha$ dove α è l'angolo fra la retta tangente e il semiasse positivo delle x

2) Si è dato un nome al valore del $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta (h)}{h}$?

   $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta (h)}{h} = f'(t_0)$ è detto DERIVATA di f nel punto $t = t_0$.

3) C'è una relazione fra l'esistenza del $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta (h)}{h}$ e la continuità di f?

   SI, se f non è continua per $t = t_0$ la derivata non esiste.

Questioni aperte

Ci si chiede: in generale qual è il significato del segno di $f'(t_0)$?

In quali condizioni la derivata può essere utile per determinare monotonia ed estremi locali di una funzione?