Lezione 14 – **Calcolo di derivate**

14.1 Legge di capitalizzazione composta

Se l'andamento dell'investimento è dato da una funzione del tipo $f : R^+ \to R,\ \ f(t) = C(1+i)^t, i \in [0,1]$, ci si chiede qual è la variazione di f per variazioni infinitesime di *t*? Cioè qual è la derivata di *f*?.

Derivate delle funzioni elementari

Per il calcolo della derivata di una funzione in un punto dove la funzione sia continua, non si utilizzano la definizione e i teoremi di esistenza ma, poiché in genere una funzione è definita a partire dalle funzioni elementari ($x^n, x^\alpha, \log_a x, a^x, \text{sen}x, \cos x$), si utilizzano le derivate di queste funzioni ed i teoremi relativi alla derivata di $kf(x), f(x) \pm g(x), f(x)\cdot g(x), f(x)/g(x), (g \circ f)(x)$.

- $f(x) = k, k \in R \Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in R$

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

- $f(x) = x^n, n \in N \ \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}, \forall x \in R$

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+h)^{n-1} + \ldots + x^{n-1}\right]}{h} =$$

  $$= \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-1} + \ldots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

- $f(x) = x^\alpha, \alpha \in R \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \forall x \in R_0^+$

- $f(x) = \log_a x, a > 0, x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e, \forall x > 0$

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} =$$

  $$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}\log_a e$$

  In particolare se *a*=*e* si ha $f(x) = \ln x, x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$

- $f(x) = a^x, a > 0 \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a, \forall x \in R$

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \ln a$$

  In particolare se *a*=*e* si ha $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x, \forall x \in R$

- $f(x) = \text{sen}x \ \Rightarrow f'(x) = \cos x, \forall x \in R$

- $f(x) = \cos x \ \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}x, \forall x \in R$

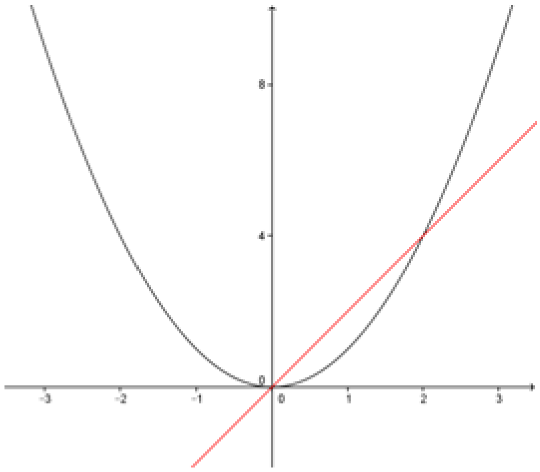
Osservazioni importanti

1) $f(x) = x^n, n \in N \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \forall x \in R_0^+$ dice che derivando una potenza il grado della potenza si abbassa di un 1!

2) $f(x)=\ln x, x>0 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}, \forall x>0$ dice che la derivata del logaritmo a base naturale è una frazione!
3) $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x, \forall x \in R$ dice che la derivata dell'esponenziale a base naturale è lo stess esponenziale!
4) Le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono, a meno del segno, una la derivata dell'altra!

Esempi 14.1

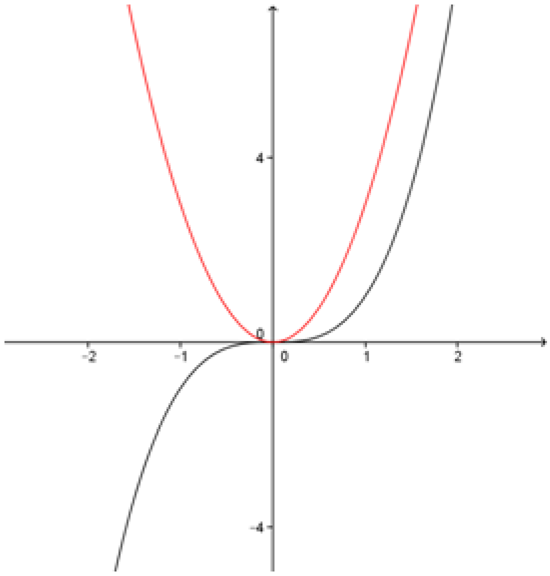
1) $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$



Osserviamo i grafici delle funzioni $f(x)=x^2$ e $f'(x)=2x$ (in rosso) si nota come per x>0 la funzione derivata sia positiva e f sia crescente mentre per x<0 la funzione derivata sia negativa e f sia decrescente (questa proprietà vale in generale).

Si osserva inoltre che nel punto di minimo di f la funzione derivata è nulla: $f'(0)=0$, questo corrisponde al fatto che nell'origine la tangente al grafico è orizzontale!

2) $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$

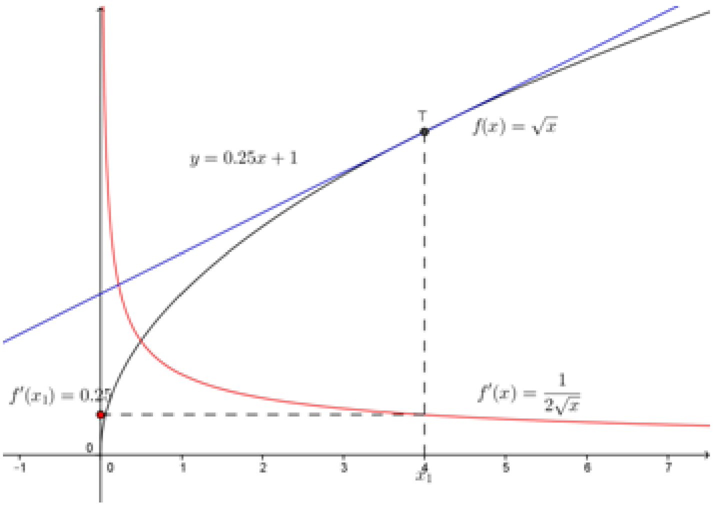


Osserviamo i grafici delle funzioni $f(x)=x^3$ e $f'(x)=3x^2$ (in rosso) si nota come la funzione derivata sia positiva per ogni $x \neq 0$ e f sia crescente.

Si osserva inoltre che nel punto (0,0) la funzione derivata è nulla: $f'(0)=0$, tuttavia tale punto non è né di minimo né di massimo per f questo corrisponde al fatto che, affinché f abbia un massimo o un minimo in un punto non è sufficiente che la tangente al grafico in quel punto sia orizzontale!

3) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}, x>0$$



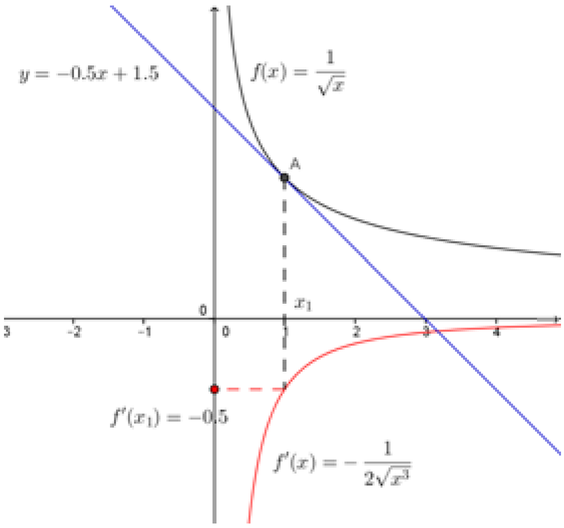
Osserviamo che f non è derivabile in tutto il suo dominio, inoltre dai grafici delle funzioni $f(x)=\sqrt{x}$ e $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ si nota come la funzione derivata sia positiva per ogni x>0 e f sia crescente.

Tuttavia la funzione derivata è decrescente

quindi la retta tangente al crescere di x ha un coefficiente angolare decrescente quindi la funzione è concava!
Si osserva infine che la funzione derivata non è mai nulla.

4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}, x>0$

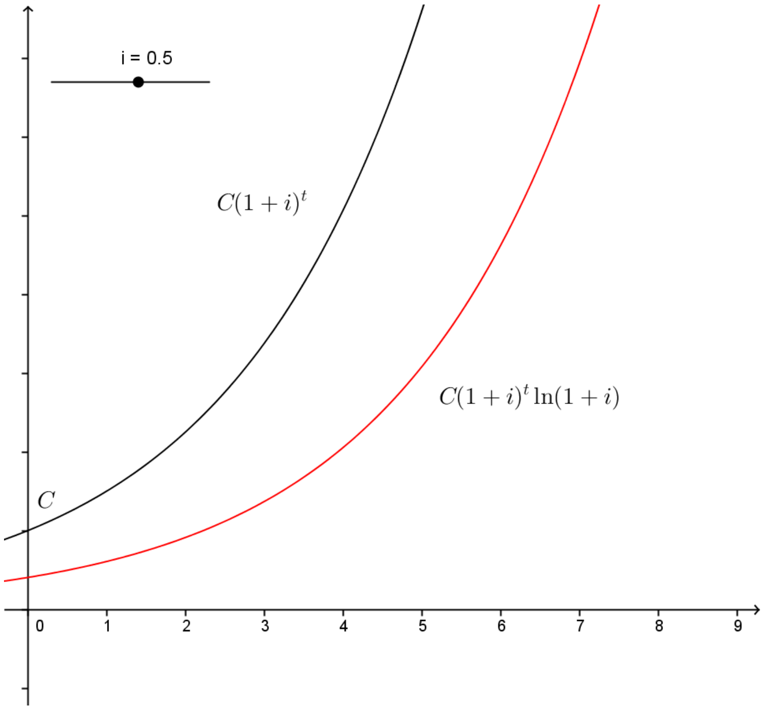


Osserviamo che f è derivabile in tutto il suo dominio, inoltre dai grafici delle funzioni $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ e $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ si nota come la funzione derivata sia negativa per ogni $x>0$ e f sia decrescente.

La funzione derivata è crescente quindi la retta tangente al crescere di x ha un coefficiente angolare crescente quindi la funzione è convessa!
Si osserva infine che la funzione derivata non è mai nulla.

4.2 Legge di capitalizzazione composta

$f: R^+ \to R,\ f(t)=C(1+i)^t, i\in[0,1]$, è una funzione esponenziale con base a = 1+i che ha come derivata $f'(t)=C(1+i)^t\ln(1+i)$.



Algebra delle derivate

Teorema 14.1
Siano $f, g : X \to R,\ x_0 \in X \subseteq R$ se f e g **derivabili in x_0** allora

- $kf(x), k \in R$ è derivabile in x_0 e $D(kf(x_0)) = kf'(x_0)$
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ è derivabile in x_0 e $D((f+g)(x_0)) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0 e $D((f \cdot g)(x_0)) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x_0) \neq 0$ è derivabile in x_0 e $D\left(\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0)\right) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Esempi 14.2

1) $f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x$

2) $f(x) = 3x^2 - 3x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x - 9x^2$

3) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + \ln x \Rightarrow f'(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$

4) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 \ln x \Rightarrow f'(x) = D\left(\dfrac{3}{2}x^2\right)\ln x + \dfrac{3}{2}x^2 D(\ln x) = 3x\ln x + \dfrac{3}{2}x^2\dfrac{1}{x} = 3x\left(\ln x + \dfrac{1}{2}\right)$

5) $f(x) = \dfrac{\frac{3}{2}x^2}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{D\left(\frac{3}{2}x^2\right)\ln x - \frac{3}{2}x^2 D(\ln x)}{(\ln x)^2} = \dfrac{3x\ln x - \frac{3}{2}x^2\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{3x}{(\ln x)^2}\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right)$

Teorema 14.2
Siano $f : X \to R, g : Y \to R$, $\operatorname{Im} f \subseteq Y$, $x_0 \in X$, se f **derivabile in x_0** e g **derivabile in $y_0 = f(x_0)$** allora **la funzione composta**

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ è derivabile in } x_0 \text{ e } h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$$

Esempi 14.3

1) $h(x) = \ln(x-1)$, sia $y = f(x) = x - 1, g(y) = \ln(y) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = 1 \cdot \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x-1}$

2) $h(x) = \sqrt{\ln(2x)}$, sia $y = f(x) = \ln(2x) = \ln 2 + \ln x, g(y) = \sqrt{y}$

$\Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(2x)}}$

Un'osservazione: $f(x) = \ln(2x)$ è a sua volta una funzione composta quindi si poteva procedere così $h'(x) = f'(x) \cdot g'(y) = 2\dfrac{1}{2x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(2x)}}$.

3) $h(x)=e^{3x^2-\frac{1}{x}}$ sia $y=f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}, g(y)=e^y$

$\Rightarrow h'(x)=f'(x)\cdot g'(y)=\left(6x+\dfrac{1}{x^2}\right)e^y=\left(6x+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{3x^2-\frac{1}{x}}$

4) $h(x)=xe^{\frac{2}{\ln x}}$ sia $y=f(x)=\dfrac{2}{\ln x}, g(y)=e^y$

$\Rightarrow h'(x)=D(x)e^{\frac{2}{\ln x}}+xD\left(e^{\frac{2}{\ln x}}\right)=e^{\frac{2}{\ln x}}+xf'(x)\cdot g'(y)=e^{\frac{2}{\ln x}}-x\dfrac{1}{x}\dfrac{2}{(\ln x)^2}e^{\frac{2}{\ln x}}=e^{\frac{2}{\ln x}}\left(1-\dfrac{2}{(\ln x)^2}\right)$

5) $h(x)=x^x$ se la funzione h si scrive così: $h(x)=e^{x\ln x}$ si può applicare la derivata della funzione composta $h(x)=e^{f(x)}$ dove $f(x)=x\ln x$, $f'(x)=\ln x+x\dfrac{1}{x}=\ln x+1$, in conclusione si ha

$h'(x)=(\ln x+1)e^{x\ln x}=(\ln x+1)x^x$

Teorema 14.3 di **de l'Hôspital**

Siano $f,g:I\to R$, $x_0\in I=(a,b)\subseteq R$, I intervallo aperto, se f e g sono **derivabili per** $x\in I, x\neq x_0$ e $g'(x)\neq 0 \,\forall x\in I, x\neq x_0$ allora

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l\\[2ex] \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

Esempi 14.4

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$ è **derivabile** per ogni $x\in R$; infatti è sicuramente derivabile per $x\neq 0$, inoltre si è dimostrato che è continua per $x=0$ (vedi Applicazione 12.1) quindi può essere derivabile anche per $x=0$.

Per verificare la derivabilità per $x=0$ si utilizza la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\text{sen}h}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h-h}{h^2}$$

Non è un limite calcolabile in modo elementare, si determina usando il teorema di **de l'Hôspital**:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\text{sen}h}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h-h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\text{sen}h}{2}=0$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{6}=+\infty$

In generale per ogni $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}ke^x=+\infty$ (k>0) ossia e^x è un infinito di ordine superiore a qualunque potenza positiva di x.

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=0$

In generale per ogni $\alpha>0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\alpha x^\alpha}=0$ ossia $\ln x$ è un infinito di ordine inferiore a qualunque potenza positiva di *x*.

14.1 Applicazione

Nel caso, non realistico, di una funzione costo strettamente crescente e convessa, il punto dove costi e ricavi sono uguali può essere un punto in cui i due grafici sono secanti, in questo caso basta risolvere l'equazione $S(x)=R(x)$, oppure un punto di tangenza, in questo secondo caso aggiungendo la condizione $S'(x)=R'(x)$, si determina l'esistenza di una soluzione tale per cui per $x\neq x_0$ il costo è sempre maggiore del ricavo.

Il punto x_0 è di tangenza se è soluzione del sistema $\begin{cases}S(x)=R(x)\\S'(x)=R'(x)\end{cases}$.

Poiché si è scelto $R(x)=mx$ lineare il sistema diventa

$\begin{cases}S(x)=mx\\S'(x)=m\end{cases}$; per esempio se si prende

$S(x)=C_f+x^2, S'(x)=2x$ il sistema diventa

$$\begin{cases}C_f+x^2=mx\\2x=m, x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2=4C_f\\x=\frac{m}{2}\end{cases}\begin{cases}m=\pm2\sqrt{C_f}, C_f>0\\x=\frac{m}{2}\to x=\sqrt{C_f}\end{cases}.$$