Lezione 17 – **Differenziabilità e Formula di Taylor** (Programma base)

17.1 Come costruire una funzione

Nel problema 4.1 si è studiato il problema break even nel caso di una funzione costo $S(x) = f(x) + C_f$ e di una funzione ricavo lineare $R(x)$ e si è osservato che affinché il problema abbia significato dal punto di vista economico bisogna fare delle ipotesi sulla monotonia e concavità delle due funzioni quindi sulle loro derivate.
Ci si chiede se si possa costruire una funzione di questo tipo fissando alcuni requisiti locali, piuttosto che globali, in altre parole si vuole costruire la funzione nell'intorno di un punto conoscendone per esempio il valore nel punto e le derivate prima e seconda nel punto.

Definizione 17.1
Sia $f:(a,b)\to R$, f si dice **differenziabile** in $x_0 \in (a,b)$ se esiste $\alpha \in R$ tale che , preso $h \in I(0), x_0 + h \in (a,b)$ si ha:

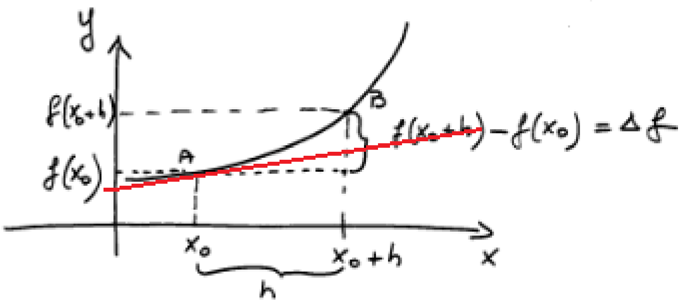
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \text{ per } h \to 0$$

Il termine αh è detto **differenziale di *f* in x_0 relativo all'incremento *h*** tale per cui

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \alpha h + o(h)$$

Ossia αh approssima $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ a meno di $o(h)$ per $h \to 0$
(infinitesimo di ordine superiore ad h) che quindi è trascurabile per h "sufficientemente piccolo".

La retta di equazione $y = f(x_0) + \alpha h$ è la migliore approssimazione di primo grado della funzione $f(x)$ in un intorno di x_0.



Esempi 17.1
1) La funzione $f(x) = x^4$ è differenziabile per ogni $x_0 \in R$; prendiamo per esempio $x_0 = 1$

$$f(1+h) - f(1) = (1+h)^4 - 1^4 = 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 - 1 =$$
$$= 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 = 4h + (6h^2 + 4h^3 + h^4) = 4h + o(h) \text{ per } h \to 0$$

Si osservi che *f* è derivabile con $f'(x) = 4x^3$ e che $f'(1) = 4$ quindi $\alpha = f'(1) = 4$.
2) La funzione $f(x) = \ln(x+1)$ è differenziabile per ogni $x_0 \in (-1,+\infty)$; prendiamo per esempio $x_0 = 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0) - \alpha h}{h} = \frac{\ln(1+h) - \ln 1 - \alpha h}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h} - \alpha \underset{h\to 0}{\to} 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

quindi $f(0+h) - f(0) - h = o(h)$ per $h \to 0$ ossia $\ln(1+h) = h + o(h)$ per $h \to 0$.

Si osservi che *f* è derivabile con $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e che $f'(0) = 1$ quindi $\alpha = f'(0) = 1$.

3) La funzione $f(x)=e^x$ è differenziabile per ogni $x_0 \in R$; prendiamo per esempio $x_0=0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)-\alpha h}{h}=\frac{e^h-1-\alpha h}{h}=\frac{e^h-1}{h}-\alpha \underset{h\to 0}{\to} 0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

quindi $f(0+h)-f(0)-h=o(h)$ per $h\to 0$ ossia $e^h-1=h+o(h)$ per $h\to 0$

Si osservi che *f* è derivabile con $f'(x)=e^x$ e che $f'(0)=1$ quindi $\alpha = f'(0)=1$.

Teorema 17.1

Sia $f:(a,b)\to R$, $x_0\in(a,b)$, *f* è **differenziabile** in x_0 se e solo se *f* è **derivabile** e $\alpha = f'(x_0)$

Dimostrazione (Programma avanzato)

f è **differenziabile** in x_0 $\Rightarrow$ esiste $\alpha \in R$ tale che, preso $h\in I(0), x_0+h\in(a,b)$ si ha:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\alpha h+o(h) \text{ per } h\to 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha h+o(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha h}{h}+\frac{o(h)}{h}=\alpha \Leftrightarrow f'(x_0)=\alpha$$

f è **derivabile** in $x_0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=0$

ossia $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=\varepsilon(h)$ infinitesimo per $h\to 0$.

Poiché nel limite $h\neq 0$, si può moltiplicare per *h*: $f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)=h\varepsilon(h)=o(h)$

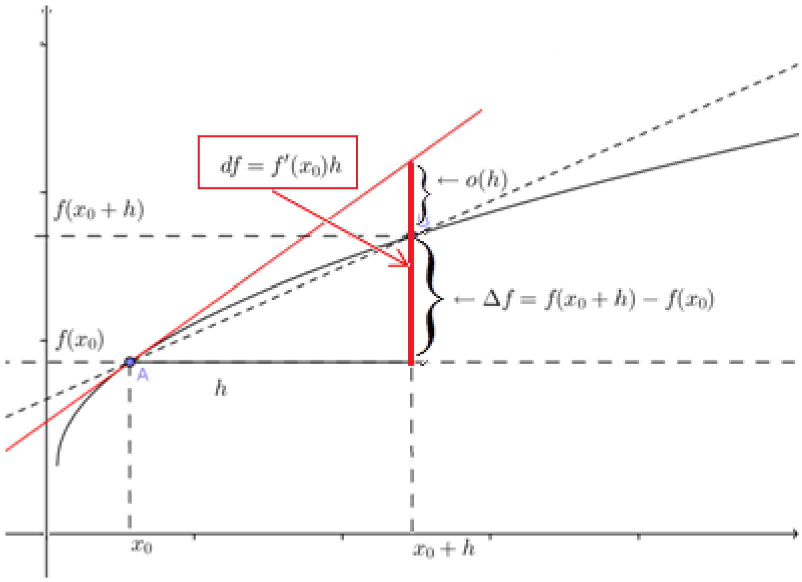
quindi $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+o(h)$ e *f* è **differenziabile** in x_0 con differenziale $df=hf'(x_0)$.

In conclusione se *f* è derivabile

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h) \text{ per } h\to 0$$

ossia

$$\Delta f = f'(x_0)h+o(h) \text{ per } h\to 0$$



Osservazione

Ora si può apprezzare la notazione $f'(x)=\frac{df}{dx}$; infatti, poiché $h=dx$, si ha

$df = hf'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{df}{dx}$ ossia la derivata in x_0 è il rapporto dei differenziali *df* e *dx*.

Interpretazione geometrica del differenziale

Preso un punto del grafico $A=(x_0, f(x_0))$, $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente in A quindi l'approssimazione con il differenziale ossia la retta di equazione $y = f(x_0)+ f'(x_0)h$ è la retta tangente; infatti, posto $h = x - x_0$, l'equazione di una retta per A e avente coefficiente angolare $f'(x_0)$ è

$$y = f(x_0)+ f'(x_0)(x - x_0)$$

Esempi 17.1 (continua)

1) La funzione $f(x)= x^4$ è differenziabile per ogni $x_0 \in R$ e $f'(x)= 4x^3$.
   Il polinomio di primo grado approssimante in un punto x_0 è
   $P(x)= x_0^4 + 4x_0^3(x - x_0)= 4x_0^3 x - 3x_0^4$.
   Scegliendo, per esempio, $x_0 = 1$, $P(x)= 4x - 3$
2) La funzione $f(x)= \ln(x+1)$ è differenziabile per ogni $x_0 \in (-1,+\infty)$ e $f'(x)= \dfrac{1}{x+1}$.
   Il polinomio di primo grado approssimante in un punto x_0 è $P(x)= \ln x_0 + \dfrac{1}{x_0+1}(x - x_0)$
   Scegliendo, per esempio, $x_0 = 1$, $P(x)= \dfrac{1}{2}(x-1)$.
3) La funzione $f(x)= e^x$ è differenziabile per ogni $x_0 \in R$ e $f'(x)= e^x$.
   Il polinomio di primo grado approssimante in un punto x_0 è $P(x)= e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0)$.
   Scegliendo, per esempio, $x_0 = 0$, $P(x)= e^0 + e^0 x = 1 + x$.

Teorema 17.2

Sia $f:(a,b) \to R$, f **derivabile *n* volte** in $x_0 \in (a,b)$ e $h \in R$ tale che $x_0 + h \in (a,b)$

$$f(x_0+h)= f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+o(h^n)$$

dove $o(h^n)$ è una funzione di h infinitesima di ordine superiore a h^n per $h \to 0$

Formula di Taylor di ordine *n* con Resto di Peano.

Se $x = x_0 + h$ ossia $h = x - x_0$

$$f(x)= f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+o((x-x_0)^n)$$

Osservazione importante

1) Il teorema afferma che $P_n(h)= f(x_0)+hf'(x_0)+\dfrac{h^2}{2}f''(x_0)+\dfrac{h^3}{3!}f'''(x_0)\ldots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$, detto Polinomio di Taylor di ordine *n*, è la migliore approssimazione di grado *n* della funzione $f(x)$ in un intorno di x_0.
2) Si può pensare che $o(h^n)$ sia l'errore commesso considerando $P_n(h)$ come approssimazione di $f(x_0+h)$ ossia $f(x_0+h)= P_n(h)+E_h$ dove $E_h = o(h^n)$.
   Poiché E_h dipende da *h*, fissato *h* può essere anche "grande", diventa trascurabile se *h* è "sufficientemente piccolo".

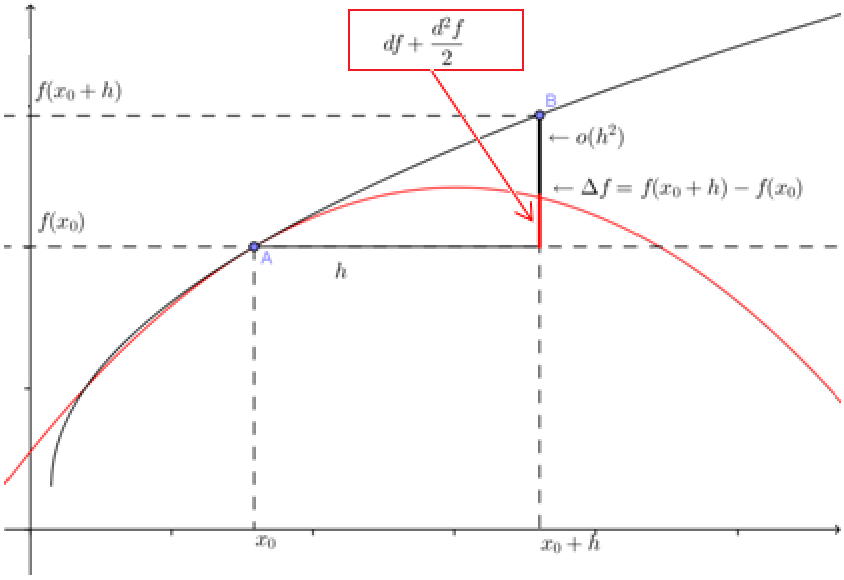
Casi particolari

Polinomio grado 1: $P_1(h)= f(x_0)+hf'(x_0)= f(x_0)+df$ dove

$df_h = hf'(x_0)$ è il differenziale primo o di ordine 1.

Polinomio grado 2: $P_2(h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) = f(x_0) + df + \frac{d^2 f}{2}$ dove

$d^2 f_h = h^2 f''(x_0)$ è il differenziale secondo o di ordine 2.



Esempi 17.2

1) La funzione $f(x) = x^4$ è derivabile infinite volte per ogni $x \in R$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$;

prendendo $x_0 = 1$: $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$, $\frac{f''(1)}{2} = 6$ quindi $f(1+h) = 1 + 4h + 6h^2 + o(h^2)$ per $h \to 0$.

In questo caso, poiché la funzione è una potenza, si ha che $o(h^2) = 4h^3 + h^4$; infatti $f(1+h) = (1+h)^4 = 1 + 4h + 6h^2 + (4h^3 + h^4)$.

Posto $x = 1 + h$, $f(x) = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ per $x \to 1$ e il polinomio di Taylor del 2° ordine è: $P_2(x) = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 = 6x^2 - 8x + 3$.

2) La funzione $f(x) = \ln(x+1)$ è differenziabile per ogni $x \in (-1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,

$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$; prendendo $x_0 = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$ quindi

$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ per $h \to 0$.

Posto $x = 0 + h$ $f(x) = (x-0) - \frac{1}{2}(x-0)^2 + o((x-0)^2)$ per $x \to 0$ e il polinomio di Taylor del 2° ordine è: $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$. In generale $P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} x^n$

3) La funzione $f(x) = e^x$ è derivabile infinite volte per ogni $x \in R$, $f(x) = f'(x) = f''(x) = e^x$;

prendendo $x_0 = 0$: $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ quindi $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ per $h \to 0$.

Posto $x = 0 + h$ $f(x) = 1 + (x-0) + \frac{1}{2}(x-0)^2 + o((x-0)^2)$ per $x \to 0$ e il polinomio di Taylor del 2° ordine è: $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. In generale $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$.

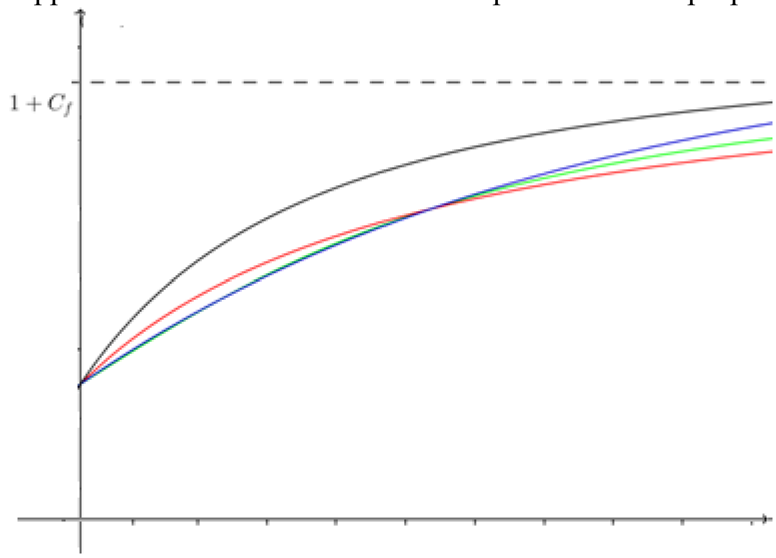
17.1 Applicazione

Per la formula di Taylor con $x_0 = 0$ si ha $S(x) = S(0) + S'(0)x + \frac{1}{2}S''(0)x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$.

Se $S(0) = C_f$, $S'(0) = 1$ e $S''(0) = -2$ si può calcolare l'approssimazione del secondo ordine di $S(x)$ nell'origine:

$$y = C_f + x - x^2$$

Proviamo a calcolare l'approssimazione del secondo ordine per le funzioni proposte nella lezione 16:



1) $S(x) = 1 - \frac{1}{x+1} + C_f \to S'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, S''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3} \to S'(0) = 1, S''(0) = -2$

$P_2(x) = C_f + x - x^2$ (grafico nero) , il polinomio uguale a quello già calcolato.

Per x=0.1 l'errore è $|S(0.1) - P_2(0.1)| \cong |0.090909 - 0.1 + 0.01| = 0.00090909$

2) $S(x) = 1 - \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2} + C_f \to S'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+1}(x+1)^2}, S''(x) = \frac{15}{4\sqrt{x+1}(x+1)^3} \to S'(0) = \frac{3}{2}, S''(0) = \frac{15}{4}$

$P_2(x) = C_f + \frac{3}{2}x - \frac{15}{8}x^2$ (grafico rosso).

Per x=0.1 l'errore è $|S(0.1) - P_2(0.1)| \cong \left|0.13322 - \frac{3}{2}0.1 + \frac{15}{8}0.01\right| = 0.00197$

3) $S(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x + C_f \to S'(x) = \frac{\ln 2}{2^x}, S''(x) = -\frac{(\ln 2)^2}{2^x} \to S'(0) = \ln 2, S''(0) = -(\ln 2)^2$

$P_2(x) = C_f + x\ln 2 - x^2\frac{(\ln 2)^2}{2}$ (grafico blu).

Per x=0.1 l'errore è $|S(0.1) - P_2(0.1)| \cong \left|0.06696 - \ln 2 \cdot 0.1 + \frac{(\ln 2)^2}{2}0.01\right| = 0.38595$

4) $S(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x) + C_f \to S'(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)}, S''(x) = -\frac{4x}{\pi(x^2+1)^2} \to S'(0) = \frac{2}{\pi}, S''(0) = 0$

$P_2(x) = C_f + \frac{2}{\pi}x$ (grafico verde); in questo caso il termine di secondo grado è nullo quindi per ottenere un'approssimazione migliore bisogna calcolare il polinomio di Taylor di terzo grado usando la derivata terza.

Per x=0.1 l'errore è $\left|S(0.1)-P_2(0.1)\right| \cong \frac{2}{\pi}\left|\arctan(0.1)-0.1\right| = 0.57318$

Dalla figura si può vedere che, come per le funzioni originarie, i grafici delle approssimazioni nelle vicinanze di 0 sono "vicini", lontano dall'origine i grafici possono essere lontani fra di loro molto di più delle funzioni originarie.