# Lezione 18 – **Applicazioni del differenziale e Formula di Taylor**

## 18.1 Come approssimare il valore di una funzione

In vari problemi ci si trova a dover conoscere il valore di una funzione in punti per cui tale valore non è calcolabile o, se lo è, il calcolo è molto complesso.
Oppure capita di conoscere in un punto particolare del dominio il valore di una funzione e delle sue derivate prima, seconda, ecc. senza conoscere la funzione e se ne vogli conoscere il valore in un punto vicino.
Ci si chiede se sia possibile risolvere questo tipo di problemi approssimando il valore richiesto con una precisione fissata.

(Programma base)
Richiamiamo il **Teorema 17.2**
Sia $f:(a,b)\to R$, $f$ **derivabile *n* volte** in $x_0\in(a,b)$ e il polinomio di Taylor nella variabile *h* con $x_0+h\in(a,b)$

$P_n(h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\dfrac{f''(x_0)}{2}h^2+\dfrac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$ allora $P_n(h)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che $f(x_0+h)=P_n(h)+o(h^n)$ per $h\to 0$ (**Formula di Taylor**)
$o(h^n)$ è una funzione di *h* infinitesima di ordine superiore a $h^n$ per $h\to 0$ detta **Resto di Peano**.

Casi particolari

**Formula di Taylor al primo ordine**:

$$f(x_0+h)==f(x_0)+f'(x_0)h+o(h^n)=P_1(h)+o(h^n)$$

Polinomio di Taylor di grado 1: $P_1(h)=ah+b$ dove $a=f'(x_0),\ b=f(x_0)$

oppure

$P_1(h)=f(x_0)+df_h$ dove $df_h=f'(x_0)h$ è il differenziale primo o di ordine 1.

**Formula di Taylor al secondo ordine**:

$$f(x_0+h)==f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)=P_2(h)+o(h^2)$$

Polinomio di Taylor di grado 2: $P_1(h)=a+bh+ch^2$ dove $a=f(x_0),\ b=f'(x_0),\ c=\dfrac{f''(x_0)}{2}$

oppure

$P_2(h)=f(x_0)+df+\dfrac{d^2f}{2}$ dove

$df_h=f'(x_0)h$ è il differenziale primo o di ordine 1 e

$d^2f_h=f''(x_0)h^2$ è il differenziale secondo o di ordine 2.

**Esempio 19.2**
Data la funzione $f(x)=x\ln(x)$, scrivere i polinomi di primo grado $P_1(x)$ e di secondo grado $P_2(x)$ che approssimano *f* "nelle vicinanze di 1".

$f'(x)=\ln(x)+1\to f'(1)=1$ quindi $P_1(x)=x-1$.

$f''(x)=\dfrac{1}{x}\to f''(1)=1$ quindi $P_2(x)=x-1+\dfrac{1}{2}(x-1)^2=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$.

(Programma avanzato)
Per poter valutare l'ordine di grandezza dell'errore commesso è utile usare la formula con **Resto di Lagrange.**

Sia $f:(a,b)\to R$, $f$ **derivabile $n$ volte** in $x_0\in(a,b)$ con derivate continue ossia $f$ è di classe $C^n$ e esiste $f^{(n+1)}(x), x\in(a,b)$ allora esiste almeno un valore $c$ tale che $\begin{cases} c\in(x_0,x_0+h) \text{ se } h>0 \\ c\in(x_0+h,x_0) \text{ se } h<0\end{cases}$ e

$$f(x_0+h)=P_n(h)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$R_n(h)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$ è detto **Resto di Lagrange** si osserva che $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}=o(h^n)$ per $h\to 0$.

**Esempio 19.3**

Data la funzione $f(x)=x\ln(x)$, si considerino i polinomi di Taylor $P_1(x)$ e $P_2(x)$ visti nell'Esempio 19.2 e utilizzarli per calcolare $f(1.2)$ approssimando per eccesso gli errori commessi in valore assoluto.

- $P_1(1.2)=1.2-1=0.2$

  Poiché $h^2=(x-1)^2$ e $f''(x)=\frac{1}{x}$, il resto secondo Lagrange è $R(x)=\frac{1}{2c}(x-1)^2, 1<c<1.2$ quindi $|R_1(1.2)|=\frac{0.04}{2c}, 1<c<1.2\to R_1(1.2)<\frac{0.04}{2}=0.02<10^{-1}$ e l'errore commesso e minore di $10^{-1}$.

  Si osservi che, essendo 0.2<1, sostituendo a $c$ il valore 1 si ottiene una **maggiorazione del resto!**

- $P_2(1.2)=\frac{1.2^2}{2}-\frac{1}{2}=0.22$

  Poiché $h^3=(x-1)^3$ e $f'''(x)=-\frac{1}{x^2}$, il resto secondo Lagrange è $R(x)=-\frac{1}{6c^2}(x-1)^3, 1<c<1.2$ quindi $|R_2(1.2)|=\frac{0.008}{6c^2}, 1<c<1.2\to R_2(1.2)<\frac{0.008}{6}=0.01\bar{3}<10^{-1}$ e l'errore commesso è minore di $0.01\bar{3}$ quindi ancora dell'ordine di $10^{-1}$.

Consideriamo le seguenti funzioni $\ln(x+1), e^x, \sin x, \cos x$.
E' noto che il calcolo di queste funzioni in un punto generico $x_0$ del dominio non è elementare quindi, qualora si voglia calcolarlo, è necessaria una approssimazione.
Il teorema dice che, noto il valore la migliore approssimazione polinomiale di grado $n$ in un punto "vicino" a $x_0$ è il polinomio di Taylor di ordine $n$.
Poiché le quattro funzioni sono tutte derivabili infinite volte nel loro dominio, se si sceglie $x_0=0$ si ottiene quanto segue.

- $f(x)=\ln(x+1)$ ha derivata $n$-ma per ogni $n\in N$ e $x\in(-1,+\infty)$, preso $x_0=0$

  $f'(x)=\frac{1}{x+1}\to f'(x_0)=1$, $f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\to f''(x_0)=-1$, $f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\to f'''(x_0)=2$,

  $f^{(4)}(x)=\frac{6}{(x+1)^4}\to f^{(4)}(x_0)=6$, $f^{(5)}(x)=\frac{24}{(x+1)^5}\to f^{(5)}(x_0)=24$, ecc.

  $P_5(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{6}x^3-\frac{6}{24}x^4+\frac{24}{120}x^5=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+.\frac{1}{5}x^5=\sum_{i=1}^{5}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}x^i$

Calcolando le derivate successive alla 5° si trova la stessa struttura quindi si può dire che in generale il polinomio di Taylor di ordine *n* è

$$P_n(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots+(-1)^n\frac{1}{n}x^n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}x^i \quad \text{e}$$

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots+(-1)^n\frac{1}{n}x^n+o(x^n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}x^i+o(x^n) \quad \text{per } x\to 0.$$

Il resto di Lagrange è $(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)(c+1)^{n+1}}x^{n+1}, |c|<|x|$.

- $f(x)=e^x$ ha derivata *n*-ma per ogni $n\in N$ e $x\in R$, $f(x)=f'(x)=f''(x)=...=f^{(n)}(x)=e^x$;
preso $x_0=0$: $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n)}(x_0)=e^0=1$ quindi.

$$P_n(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\dots+\frac{1}{n!}x^n \quad \text{e}$$

$$e^x=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\dots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}x^i+o(x^n) \quad \text{per } x\to 0$$

Il resto di Lagrange è $\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, |c|<|x|$.

- $f(x)=\sin x$ ha derivata *n*-ma per ogni $n\in N$ e $x\in R$,
$f(x)=f^{(4)}(x)=\sin x$
$f'(x)=f^{(5)}(x)=\cos x,$
$f''(x)=f^{(6)}(x)=-\sin x,$
$f^{(3)}(x)=f^{(7)}(x)=-\cos x$
preso $x_0=0$:
$f(x_0)=f^{(4)}(x_0)=0, f'(x_0)=f^{(5)}(x_0)=1, f''(x_0)=f^{(6)}(x_0)=0, f^{(3)}(x_0)=f^{(7)}(x_0)=-1$ quindi.
$P_n(x)=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+\dots\pm\dfrac{1}{n!}x^n$ dove *n* è dispari e la scelta ± dipende se *n*=3,7,11,… oppure *n*=1,5,9,…

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\dots+o(x^n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{(2i+1)!}x^{2i+1}+o(x^n) \quad \text{per } x\to 0$$

Si può osservare che il fatto che nel polinomio di Taylor compaiano solo potenze dispari dipende dal fatto che sin *x* una funzione dispari ossia sin(-*x*)=-sin(*x*).

- $f(x)=\cos x$ ha derivata *n*-ma per ogni $n\in N$ e $x\in R$,
$f(x)=f^{(4)}(x)=\cos x$
$f'(x)=f^{(5)}(x)=-\sin x,$
$f''(x)=f^{(6)}(x)=-\cos x,$
$f^{(3)}(x)=f^{(7)}(x)=\sin x$
preso $x_0=0$:
$f(x_0)=f^{(4)}(x_0)=1, f'(x_0)=f^{(5)}(x_0)=0, f''(x_0)=f^{(6)}(x_0)=-1, f^{(3)}(x_0)=f^{(7)}(x_0)=0$ quindi.
$P_n(x)=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+\dots\pm\dfrac{1}{n!}x^n$ dove *n* è pari e la scelta ± dipende se *n*=2,6,10,… oppure *n*=4,8,12,…

$$\sin x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\dots+o(x^n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\frac{1}{(2i)!}x^{2i}+o(x^n) \quad \text{per } x\to 0$$

Si può osservare che il fatto che nel polinomio di Taylor compaiano solo potenze pari dipende dal fatto che cos $x$ una funzione pari ossia cos(-$x$)=cos($x$).

**Esempi 19.4**

1) Data la funzione $f(x) = \ln(x+1)$, calcolare a meno di $10^{-3}$ il valore di $f(0.2) = \ln(1.2)$

$$P_1(0.2) = 0.2$$

$$P_2(0.2) = P_1(0.2) - \frac{1}{2}0.2^2 = 0.2 - 0.02 = 0.18$$

$$P_3(0.2) = P_2(0.2) + \frac{1}{3}0.2^3 = 0.18 + 0.002\overline{6} = 0.182\overline{6}$$

$$P_4(0.2) = P_3(0.2) + \frac{1}{4}0.2^4 = 0.182\overline{6} - 0.0004 = 0.1822\overline{6}$$

Le prime tre cifre decimali non sono cambiate quindi 0.182 è l'approssimazione a meno di $10^{-3}$.

Usando il resto di Lagrange si ha $|R_3(0.2)| = \frac{1}{4(c+1)^4}0.2^4 < \frac{1}{4 \cdot 1.2^4}0.2^4 \cong 0.000193$ che conferma quanto detto.

2) Data la funzione $f(x) = e^x$ , calcolare a meno di $10^{-3}$ il valore di $f(0.2) = e^{0.2}$

$$P_1(0.2) = 0.2$$

$$P_2(0.2) = P_1(0.2) + \frac{1}{2}0.2^2 = 0.2 + 0.02 = 0.22$$

$$P_3(0.2) = P_2(0.2) + \frac{1}{6}0.2^3 = 0.22 + 0.001\overline{3} = 0.221\overline{3}$$

$$P_4(0.2) = P_3(0.2) + \frac{1}{24}0.2^4 = 0.221\overline{3} + 0.0000\overline{6} = 0.2213\overline{9} = 0.2214$$

Le prime tre cifre decimali non sono cambiate quindi 0.221 è l'approssimazione a meno di $10^{-3}$.

Usando il resto di Lagrange si ha $|R_3(0.2)| = \frac{e^c}{24}0.2^4 < \frac{e^{0.2}}{24}0.2^4 < \frac{e^1}{24}0.2^4 < \frac{3}{24}0.2^4 \cong 0.0002$ che conferma quanto detto.

Si può osservare che con il polinomio di terzo grado si ottiene un'approssimazione migliore come si poteva dedurre dal fatto che anche la quarta cifra decimale era invariata quindi il valore approssimato diventerebbe 0.2213 a meno di $10^{-4}$.

3) Data la funzione $f(x) = \sin x$ , calcolare a meno di $10^{-4}$ il valore di $f(0.2) = \sin(0.2)$

$$P_1(0.2) = 0.2$$

$$P_2(0.2) = P_1(0.2)$$

$$P_3(0.2) = P_1(0.2) - \frac{1}{6}0.2^3 = 0.2 - 0.001\overline{3} = 0.198\overline{6}$$

$$P_4(0.2) = P_3(0.2)$$

$$P_5(0.2) = P_2(0.2) + \frac{1}{120}0.2^5 = 0.198\overline{6} + 0.000002\overline{6} = 0.19866\overline{3}$$

Le prime quattro cifre decimali non sono cambiate quindi 0.1986 è l'approssimazione a meno di $10^{-4}$.

Usando il resto di Lagrange e considerando che cos $c$ <1, si ha

$|R_3(0.2)| = \frac{\sin(c)}{4!}0.2^4 < \frac{1}{24}0.2^4 = 0.0000\overline{6}$ che conferma quanto detto.

Si può osservare che, poiché $P_4(0.2) = P_3(0.2)$, si può approssimare il resto anche in modo più preciso usando così:

$$\left|R_4(0.2)\right| = \frac{\cos(c)}{5!}0.2^5 < \frac{1}{120}0.2^5 = 0.000002\bar{3}\ .$$

4) Data la funzione $f(x) = \cos x$ , calcolare a meno di $10^{-4}$ il valore di $f(0.2) = \cos(0.2)$

$$P_1(0.2) = 1$$

$$P_2(0.2) = P_1(0.2) - \frac{1}{2}0.2^2 = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$P_3(0.2) = P_2(0.2)$$

$$P_4(0.2) = P_3(0.2) + \frac{1}{24}0.2^4 = 0.98 + 0.0000\bar{6} = 0.9800\bar{6}$$

Le prime quattro cifre decimali non sono cambiate quindi 0.98 è l'approssimazione a meno di $10^{-4}$.
Usando il resto di Lagrange e considerando che sen $c$ <1 si ha

$$\left|R_3(0.2)\right| = \frac{\sin(c)}{24}0.2^4 < \frac{1}{24}0.2^4 = 0.0000\bar{6}$$ che conferma quanto detto.