Lezione 20 - **L'integrale indefinito** (Programma base)

20.1 Un problema "inverso"

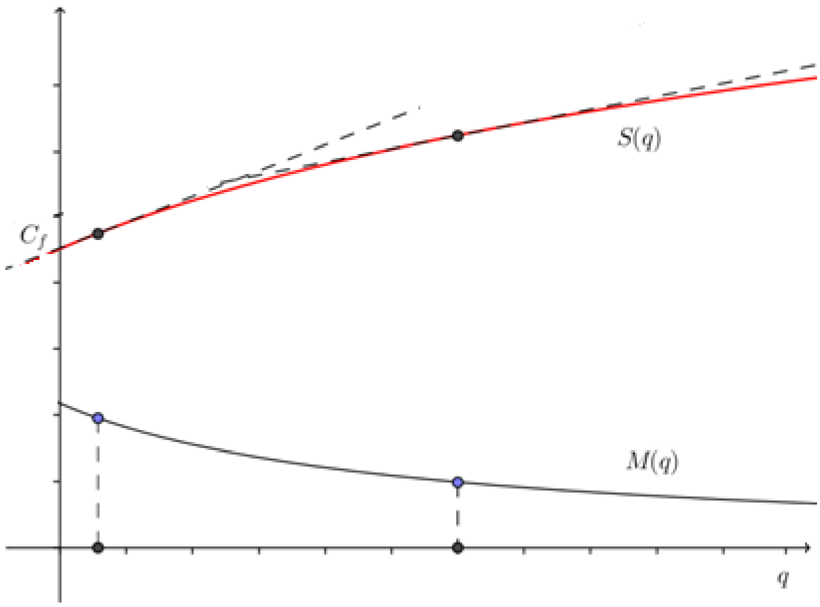
Si è visto in precedenza che in molti casi si utilizza il concetto di derivata per descrivere l'andamento di un fenomeno attraverso la sua variazione relativa "istantanea". E' un modo di descrivere i problemi da un punto di vista locale; infatti la derivata è un numero che misura la *pendenza* del grafico di una funzione e quindi ne descrive punto per punto l'andamento.

Per esempio, si è visto che se $S(q)$ è la funzione continua che esprime il costo totale da sostenere in corrispondenza di diversi livelli di output (q), la sua derivata rappresenta la funzione di costo marginale $M(q)$.

La domanda che ora ci si pone è:

"E' possibile, nota la derivata di una funzione, risalire alla o alle funzioni originarie?"

Per rispondere bisogna conoscere il valore degli eventuali costi C_f fissi (ossia la parte di costi totali che non dipende da q) e, soprattutto, individuare un metodo per risalire da $M(q)$ a $S(q)$.
Da un'analisi grafica si capisce che il problema ha soluzione.



Nella figura sono riportate una funzione $M(q)$ e una funzione $S(q)$ possibile soluzione al problema che in generale non è unica; infatti, come si è dimostrato nel teorema 15.6, due funzioni differiscono per una costante se e solo se le loro derivate sono uguali.
In seguito si cercherà di dare risposta a questa domanda introducendo il concetto di integrale indefinito.

1.2 Il concetto di primitiva

Si richiama il teorema 15.6 che esprime una proprietà fondamentale della derivata di una funzione.

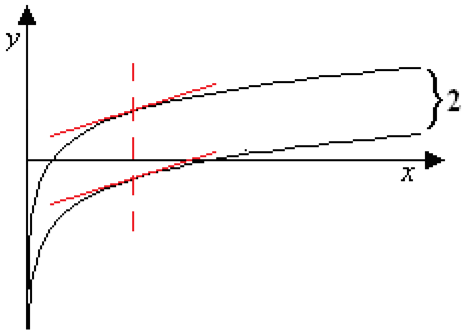
Date due funzioni $f, g : (a,b) \to R$ derivabili in (a,b)

$$f'(x) = g'(x) \; \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = c, \; c \in R$$

Graficamente questa proprietà corrisponde al fatto che, date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili: *se* il grafico di $f(x)$ è ottenuto traslando il grafico di $g(x)$ di una costante c rispetto all'asse y *allora* le rette tangenti ai due grafici in punti aventi la stessa ascissa sono parallele e viceversa.

Esempio 20.1

$f(x) = \ln x$,
$g(x) = \ln x + 2,\ x > 0$
$f'(x) = g'(x) = \dfrac{1}{x},\ x > 0$



Definizione 20.1
Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo reale I, una funzione $F(x)$ definita in I tale che $f(x)=F'(x)$ per ogni x appartenete a I, si dice ***primitiva di f(x)***.

Osservazione: il teorema citato permette di affermare che, qualora $F(x)$ sia una primitiva di $f(x)$, da essa si ricavano infinite primitive che differiscono tutte per una costante; inoltre, tutte le primitive di $f(x)$ si possono scrivere come $\boldsymbol{F(x) + c}$. In altre parole le primitive di una funzione $f(x)$ sono tutte e sole quelle funzioni ottenute da una primitiva sommando una costante arbitraria.

Definizione 20.2
L'insieme o famiglia delle primitive di una funzione $f(x)$ è detto ***integrale indefinito di f(x)*** e si indica come segue

$$\int f(x)dx$$

f*(*x*)** è detta ***funzione integranda e ***x*** è detta ***variabile di integrazione***.

Il calcolo delle primitive di una funzione è problema *in qualche modo* inverso a quello del calcolo della derivata, infatti:

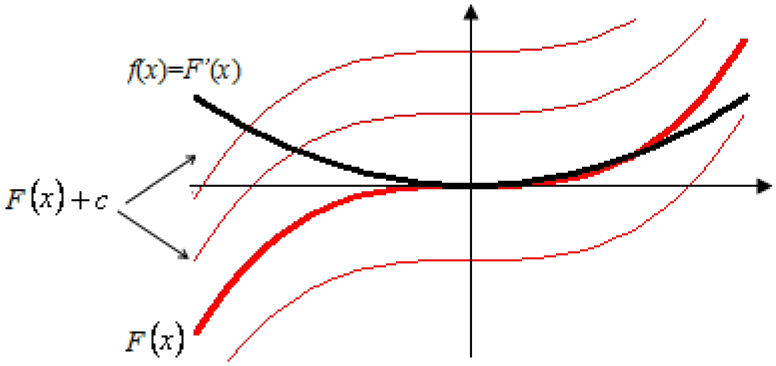
se f è *continua* $\qquad D\int f(x)dx = f(x)$,

se f è derivabile con *derivata continua* $\qquad \int D(f(x))dx = f(x) + c$.

Per quanto riguarda le tecniche che permettono di calcolare le primitive di una funzione si possono dare alcuni metodi generali che vanno selezionati a seconda del tipo di funzione integranda.
Per il calcolo delle primitive delle funzioni elementari si utilizzano le già note *formule di derivazione*.

Esempio 20.2
La funzione $F(x) = x^3$, è una primitiva di $f(x) = 3x^2$; infatti $f(x) = F'(x) = 3x^2$.

Si può scrivere:
$\int 3x^2dx = F(x) + c = x^3 + c, c \in R$.



$f(x)$	Primitive $F(x)+c$		$f(x)$	Primitive $F(x)+c$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, \quad \alpha \neq -1$		$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg}x+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$		$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$			
$\cos x$	$\sin x+c$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arctg}x+c$
e^x	e^x+c			
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$

Esempio 20.3

$f(x) = x^a$

$a \neq -1 \quad \Rightarrow \qquad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+c$

$a = -1 \quad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$ infatti

Se $x > 0 \quad D(\ln x) = \frac{1}{x}$

Se $x < 0 \quad D(\ln(-x)) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$

Allo stesso scopo possono essere usate le *regole di derivazione*. Prima di dare alcune *regole di integrazione*, anticipiamo tre esempi.

Esempi 20.4

a. Applicando il teorema per cui la derivata di una somma di funzioni derivabili è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni, si ottiene il *metodo di integrazione per somma*.

$$\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx = \int x^2 dx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}+\log|x|+c$$

b. Applicando la regola secondo cui D($kf(x)$) = $kf'(x)$, si ottiene che

$$\int 3\sqrt{x}dx = 3\int x^{1/2}dx = 3\frac{2}{3}x^{3/2} + c = 2x\sqrt{x} + c.$$

c. Applicando la regola per derivare le funzioni composte D($f(g(x))$ = $f'(g(x))g'(x)$, si ottiene che

$$\int 2\cos 2x dx = \int D(\sin 2x)D(2x)dx = \sin 2x + c$$

Il Problema di Cauchy

La ricerca delle primitive di una funzione può essere visto come la risoluzione di una equazione del tipo $y'(x) = f(x)$, detta ***Equazione differenziale***, in cui l'incognita è la funzione $y(x)$.
Un altro modo di porre la questione è stabilire se esiste una e una sola soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

detto ***problema di Cauchy***, ossia se esiste una funzione $y(x)$, derivabile in un intorno di x_0, che sia soluzione dell'equazione differenziale e che passi per il punto (x_0, y_0). Esiste un teorema detto teorema di Cauchy, che si applica alle equazioni differenziali e introduce alcune condizioni sufficienti per garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione. Nel caso particolare dell'equazione $y'(x) = f(x)$, tali condizioni si riducono alla continuità di $f(x)$ in un intorno di x_0.
In generale se si calcola un integrale indefinito si sottintende che sia definito in un intervallo in cui la funzione integranda è continua. Nell'esempio 20.3, se si considera un intervallo con x positiva la primitiva è $\ln x+c$, se si considera un intervallo con x negativa la primitiva è $\ln(-x) + c$.
Per individuare una *particolare primitiva* si impone che il suo grafico passi per un certo punto del piano; in tal caso si andrà a calcolare il valore della costante per cui questo avviene e la primitiva si considera definita nel massimo intervallo contenente il punto in cui la funzione integranda è continua. Si può dimostrare che tale primitiva è unica.

Esempi 20.5

a. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ .La famiglia delle primitive è $F(x,c) = \ln|x| + c, c \in R$

Una primitiva passante per il punto (1,2) dovrà soddisfare

$$F(x,c) = \ln 1 + c = 2\text{, ovvero } c = 2;$$

la primitiva che soddisfa la condizione è quindi

$$F(x,2) = \ln x + 2\text{, definita per ogni } x > 0.$$

Una primitiva passante per il punto (-1,2) dovrà soddisfare

$$F(x,c) = \ln(-(-1)) + c = 2\text{, ovvero } c = 2;$$

la primitiva che soddisfa la condizione è quindi

$$F(x,2) = \ln(-x) + 2\text{, definita per ogni } x < 0.$$

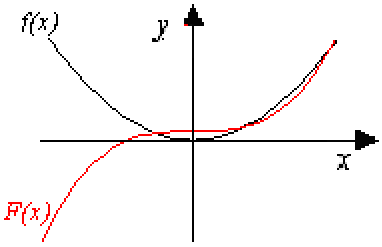
b. Data la funzione $f(x) = x^2$. La famiglia delle primitive è $F(x,c) = x^3/3 + c$.

Una primitiva passante per il punto (1,1) dovrà soddisfare

$$F(1) = 1/3 + c = 1\text{, ovvero } c = 2/3;$$

la primitiva che soddisfa la condizione è quindi

$$F(x) = (x^3 + 2)/3\text{, definita per ogni } x \text{ reale.}$$



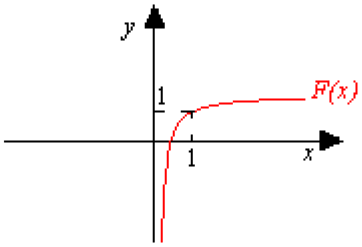
20.3c. Data la funzione $f(x) = x^{-2}$. La famiglia delle primitive è $F(x) = -x^{-1} + c$.

Una primitiva passante per il punto (1,1) dovrà soddisfare

$F(1) = -1 + c = 1$, ovvero $c=2$;

la primitiva che soddisfa la condizione è quindi

$F(x) = -x^{-1} + 2$, definita per $x>0$.



Applicazione

Ammettiamo che la direzione di un'azienda di produzione rilevi che l'ammontare del costo marginale in corrispondenza di diversi livelli di output sia ben descritto dalla funzione

$$M(q) = \frac{1}{q+1},\ q \geq 0\ .$$

Nota questa funzione di costo marginale, si vuole determinare la funzione di costo totale corrispondente $S(q)$ sapendo che i costi fissi sono $C_f = 10$.
Bisogna risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} M(q) = S'(q) = \dfrac{1}{q+1} \\ S(0) = 10 \end{cases}$$

la cui soluzione si trova calcolando $\int M(q)dq = \int \frac{1}{q+1}dq = \ln|q+1| + c$ e

ponendo $S(0) = c = 10$, da cui, tenuto conto che q+1>0, si ha che la funzione costo totale è:

$$S(q) = \ln(q+1) + 10$$