Lezione 21 – Calcolo di integrali indefiniti (Programma base)

Per quanto riguarda le tecniche che permettono di calcolare la famiglia delle primitive di una funzione, qualora esistano, si possono dare alcuni metodi generali che vanno selezionati in funzione del tipo di funzione integranda.

- Poiché **D*cf*(*x*)= *c*D*f*(*x*)** si ha che

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

Per esempio

$$\int 3\sqrt{x}dx = 3\int x^{1/2}dx = 3\frac{2}{3}x^{3/2} + c = 2x\sqrt{x} + c$$

$$\int 2senxdx = 2\int senxdx = -2\cos x + c$$

- Poiché ***D*(*f*+*g*)(*x*)= *Df*(*x*)+ *Dg*(*x*)** si ha che

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Per esempio

$$\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(x^{-2} - \frac{1}{x}\right)dx = -x^{-1} - \log|x| + c = -\frac{1}{x} - \log|x| + c$$

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int\left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + c = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + c$$

$$\int\left(x^2 - 3x + 2\right)dx = \int x^2dx - 3\int xdx + 2\int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$$

- Poiché **D*f*(*g*(*x*))= *f* '(*g*(*x*))*g*'(*x*)**, posto ***t*=*g*(*x*)**, si ha che ***g*'(*x*) = *dt*/*dx*** quindi

_f_ '(_g_(_x_))= _f_ '(_t_) e **_g_'(_x_) _dx_ = _dt_**

da cui $\int [f'(g(x))g'(x)]dx = \int f'(g(x))[g'(x)dx] = \int f'(t)dt$

$$\int [f(x)]^a f'(x)dx = \int t^a dt = \frac{t^{a+1}}{a+1} + c = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c \qquad \forall a \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)} f'(x)dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + c = \log|f(x)| + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)dx = \int a^t dt = \frac{a^t}{\log a} + c = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$$

$$\int sen(f(x))f'(x)dx = \int sentdt = -\cos t + c = -\cos f(x) + c$$

ecc.

Esempi 2.1
Calcolo di integrali immediati

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int 2x\frac{1}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1)+c$

b) $\int 3x(x^2-2)dx = \frac{3}{2}\int 2x(x^2-2)dx = \frac{3}{2}\frac{(x^2-2)^2}{3}+c$

c) $\int (x-3)\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4}+c = \frac{\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)^4}{4}+c$

d) $\int \frac{\log x}{x}dx = \int \log x\frac{1}{x}dx = \int t dt = \frac{t^2}{2}+c = \frac{\log^2 x}{2}+c$

e) $\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{1}{\log x}\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t|+c = \log|\log x|+c$

f) $\int e^{x^2+4x-1}(x+2)dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2+4x-1}(2x+4)dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^{x^2+4x-1}+c$

g) $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x-1}dx = \int D\left(\frac{1}{3}\sqrt{f(x)^3}\, f'(x)\right)dx$ dove $f(x) = x^2+4x-1$ e $f'(x) = 2x+4$

quindi $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x-1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x-1)^3}+c$.

In questo caso, essendo il calcolo più complesso, potrebbe essere utile usare il metodo di sostituzione che si vedrà più avanti.

Metodi di integrazione: funzioni razionali fratte

Abbiamo già visto come utilizzando la proprietà additiva della derivata sia possibile integrare la somma di funzioni:

$$D(f+g)(x) = f'(x)+g'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int D(f+g)(x)dx = \int f'(x)dx + \int g'(x)$$

Utilizzando tale regola è anche possibile integrare funzioni razionali fratte scomponendo una frazione nella somma di più frazioni.

1) Prima di tutto occorre fare in modo fare in modo che il grado del numeratore sia inferiore a quello del denominatore; si esegue quindi la divisione ottenendo:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}dx = \int \frac{R(x)}{B(x)}dx + \int Q(x)dx$$

dove $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto di grado inferiore al grado di $B(x)$.

2) Si calcola

$$\int \frac{R(x)}{B(x)}dx$$

Caso 1: $B(x)$ è di grado 1 quindi $R(x)$ è di grado 0.

Esempio 2.2

$$\int\left(\frac{2x^2+1}{x-1}\right)dx = \int\left((2x+2)+\frac{3}{x-1}\right)dx = x^2+2x+3\log|x-1|+c$$

Caso 2: $B(x)$ è di grado 2 e $R(x)$ è di grado 0 o 1.

si possono verificare tre sottocasi.

Caso 2.a: Il denominatore $B(x)$ è scomponibile nel prodotto di *due fattori distinti* (discriminante positivo).

$$\int \frac{R(x)}{B(x)}dx = \int\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)dx =$$
$$= A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + c$$

I valori A e B vanno calcolati in modo che l'uguaglianza $\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ si vera per ogni x quindi risolvendo un sistema in cui si uguagliano i coefficienti dei termini dello stesso grado.

Esempio 2.3

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}dx$$

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)}$$

Si risolve il sistema $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$ da cui si ottiene:

$$\int\left(\frac{x-3}{x^2-1}\right)dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)dx = -\log|x-1|+2\log|x+1|+c = \log\frac{|x+1|^2}{|x-1|}+c$$

Esempio 2.4

$$\int \frac{3}{x^2-1}dx$$

$$\frac{3}{x^2-1} = 3\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\right) = 3\frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} = 3\frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)}$$

Si risolve il sistema $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ da cui si ottiene:

$$\int \frac{3}{x^2-1}dx = \frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{3}{2}\left(\log|x-1|-\log|x+1|\right)+c = \frac{3}{2}\log\frac{|x-1|}{|x+1|}+c$$

Caso 2.b: Il denominatore $B(x)$ è scomponibile nel prodotto di *due fattori uguali* (discriminante nullo) ed è il quadrato di un binomio di primo grado.
Prima si decompone la frazione in modo che il primo termine sia semplificabile e il secondo abbia numeratore di grado 0 , quest'ultimo sarà:

$$\int \frac{R}{B(x)}dx = \frac{R}{a}\int\frac{a}{(ax+b)^2}dx = -\frac{R}{a}\frac{1}{ax+b}+c$$

Esempio 2.5

$$\int \frac{2x+2}{4x^2-4x+1}dx = \int\frac{2x-1+3}{(2x-1)^2}dx = \int\frac{1}{2x-1}dx + \int\frac{3}{(2x-1)^2}dx$$

$$\int\frac{3}{(2x-1)^2}dx = 3\int\frac{1}{(2x-1)^2}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2}{(2x-1)^2}dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{2x-1}+c$$

Quindi

$$\int \frac{2x+2}{4x^2-4x+1}dx = \int\frac{1}{2x-1}dx + \int\frac{3}{(2x-1)^2}dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{3}{2}\frac{1}{2x-1}+c$$

Caso 2.c: Il denominatore *non è scomponibile* nel prodotto di due fattori (discriminante negativo).
In questo caso si utilizza l'integrale immediato

$$\int\frac{1}{x^2+1} = \arctan x + c$$

infatti, con qualche aggiustamento, è possibile fare in modo di avere a denominatore il quadrato di un binomio di primo grado +1.

$$\int\frac{R}{B(x)}dx = \int\frac{R}{a+(bx+c)^2}dx = \frac{R}{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{bx+c}{\sqrt{a}}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{R\sqrt{a}}{ab}\int\frac{\frac{b}{\sqrt{a}}}{1+\left(\frac{bx+c}{\sqrt{a}}\right)^2}dx = \frac{R}{b\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{bx+c}{\sqrt{a}}\right)+k$$

Esempio 2.6

$$\int\frac{1}{4x^2-4x+5}dx = \int\frac{1}{4+(2x-1)^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\arctan\left(x-\frac{1}{2}\right)+k$$

Caso 3: $B(x)$ è di grado $n>2$ quindi $R(x)$ è di grado $< n$; si procede come nel caso di secondo grado. Si scompone $B(x)$ e si scrive la frazione come somma di frazioni facendo in modo che il numeratore di ogni singola frazione sia una costante opportuna.
Qualora un fattore sia del tipo $(ax+b)^k$, le frazioni da considerare sono k, con denominatori :

$$(ax+b), (ax+b)^2, \dots, (ax+b)^{k-1}, (ax+b)^k$$

Esempio 2.7

$$\int \frac{1}{x(4x^2-4x+1)}dx = \int \frac{1}{x(2x-1)^2}dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{(2x-1)}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x-1}+\frac{2}{(2x-1)^2}\right)dx =$$

$$= \log|x| - \log|2x-1| - \frac{1}{2x-1} + c\,.$$

Metodo di integrazione per sostituzione (Programma avanzato)

Come già osservato, dalla relazione **D*f*(*g*(*x*))= *f* '(*g*(*x*))*g*'(*x*)**, posto ***t*=*g*(*x*)**, si ha che

$$\boldsymbol{f'(g(x)) = f'(t)} \text{ e } \boldsymbol{g'(x)\,dx = dt}$$

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = \int f'(t)dt = f(t) + c = f(g(x)) + c$$

Questo metodo può essere applicato anche se la funzione integranda non assume una delle forme precedenti; infatti se l'integrale è $\int f(x)dx$ con $f(x)$ definita e **continua** in un intervallo I

1. Si definisce $t=g(x)$ definita in I a valori in J derivabile con continuità e invertibile (ovvero esiste $x=g^{-1}(t)$ per t appartenente a I), si ottiene:
$$x = g^{-1}(t) \Rightarrow dx = D(g^{-1}(t))(t)dt$$
$$t = g(x) \Rightarrow dt = D(g(x))dx$$
2. Si sostituisce nell'integrale x con $g(t)$ e il differenziale dx con $g'(t)$dt.
3. Si risolve l'integrale nella variabile di integrazione
$$\int f(x)dx = \int f(g^{-1}(t))D(g^{-1}(t))dt = F(t) + c$$
4. Una volta trovata $F(t)$ si sostituisce la variabile t con $\boldsymbol{g(x)}$ ottenendo
$$\int f(x)dx = F(g(x)) + c$$

Gli esempi 2.1 possono essere visti come casi particolari di applicazione del metodo di sostituzione dove la funzione integranda è $f(g(x))g'(x)$, in questo caso non è necessario passare dalla funzione inversa perché basta porre $\boldsymbol{f'(g(x)) = f'(t)}$ e $\boldsymbol{g'(x)\,dx = dt}$

$$\int \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)^3 (x-3)dx \overset{\left[\begin{smallmatrix} t=\frac{x^2}{2}-3x \\ dt=(x-3)dx \end{smallmatrix}\right]}{=} \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\left(\frac{x^2}{2} - 3\right)^4}{4} + c$$

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \int \log x \frac{1}{x}dx \overset{\left[\begin{smallmatrix} t=\log x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{smallmatrix}\right]}{=} \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\log^2 x}{2} + c$$

In altri casi, se si associa la variabile t a una funzione contenuta nella definizione della funzione integranda, si ha una semplificazione dell'integrale.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx \overset{\left[\begin{smallmatrix} t=\sqrt{x}+1 \\ (t-1)^2=x \\ 2(t-1)dt=dx \end{smallmatrix}\right]}{=} \int \frac{2(t-1)}{t}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = 2(t - \log|t|) + c =$$
$$= 2\left(\sqrt{x} + 1 - \log\left(\sqrt{x}+1\right)\right) + c$$

Metodi di integrazione: per parti (Programma avanzato)

Poiché **D(*f*(*x*) *g*(*x*))= *f'*(*x*) *g*(*x*)+ *f*(*x*) *g'* (*x*)** si ha che se *f* e *g* sono continue con derivate continue in *I*

$$\int D(f(x)g(x))dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)g(x)+c = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$
$$\Downarrow$$
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + c$$

Per applicare questa regola bisogna scegliere ***f*(*x*)** e ***g* (*x*)** in modo opportuno; lo scopo è quello di avere alla destra dell'uguale un integrale più facile da calcolare rispetto a quello che compare a sinistra.
Si opera quindi una scelta che determina due fattori:

f*(*x*)** detto ***fattore finito
g'* (*x*)d*x detto ***fattore differenziale***.

1) $$\int x\log x \overset{\left[\begin{smallmatrix} f(x)=\log x \\ g'(x)=x \\ g(x)=x^2/2 \end{smallmatrix}\right]}{=} \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx + c = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2}dx + c = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c =$$
$$= \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right) + c$$

2) $$\int xe^x dx \overset{\left[\begin{smallmatrix} f(x)=x \\ g'(x)=e^x \\ g(x)=e^x \end{smallmatrix}\right]}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

3) $$\int \log x dx \overset{\left[\begin{smallmatrix} f(x)=\log x \\ g'(x)=1 \\ g(x)=x \end{smallmatrix}\right]}{=} x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x + c$$

Osservazione: Poiché la scelta del fattore differenziale implica la determinazione di una primitiva *g*(*x*), non sempre la scelta naturale di tale primitiva è anche la più opportuna. Per esempio nell'integrale $\int \ln(x+1)dx$ il fattore differenziale è d*x* le cui primitive sono le funzioni *x*+*c*; è evidente che scegliendo *g*(*x*)=*x*+1 i calcoli si semplificano, infatti

4) $$\int \log(x+1)dx \overset{\left[\begin{smallmatrix} f(x)=\log x \\ g'(x)=1 \\ g(x)=x+1 \end{smallmatrix}\right]}{=} (x+1)\log(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}dx = (x+1)\log(x+1) - x + c$$