Lezione 23 – Funzione integrale e Teorema fondamentale (Programma base)

In questa lezione si affronta il "cuore" del calcolo integrale ovvero il teorema fondamentale. Premettiamo una conseguenza di questo teorema che dimostreremo alla fine della lezione ma che ci sembra importante citare per la sua straordinaria utilità pratica:

Per calcolare l'integrale definito di una funzione continua basta trovare una delle primitive della funzione integranda e calcolare la differenza fra i valori assunti da tale primitiva negli estremi di integrazione.

La media integrale

Definizione 23.1
Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ con $a \neq b$

$$v = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

è detto ***media integrale*** o ***valor medio di f(x) in [a,b]*** e valgono i seguenti teoremi.

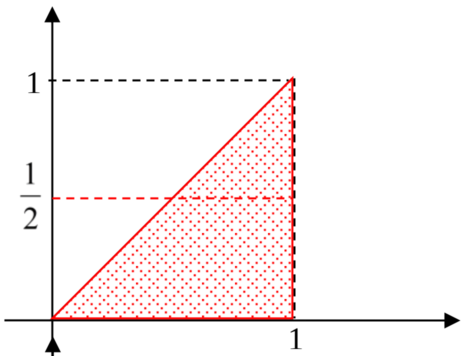
Esempi 23.1

1) Data la funzione $f(x) = 2$ determinarne il valor medio nell'intervallo [0,5]

$$v_m = \frac{\int_0^5 2dx}{5} = \frac{5 \cdot 2}{5} = 2$$

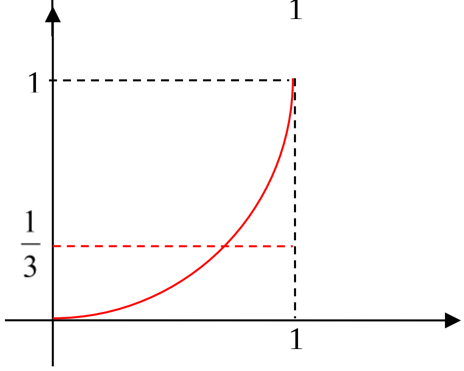
2) Data la funzione $f(x) = x$ determinarne il valor medio nell'intervallo [0,1]

$$v_m = \frac{\int_0^1 xdx}{1} = \frac{1}{2}$$



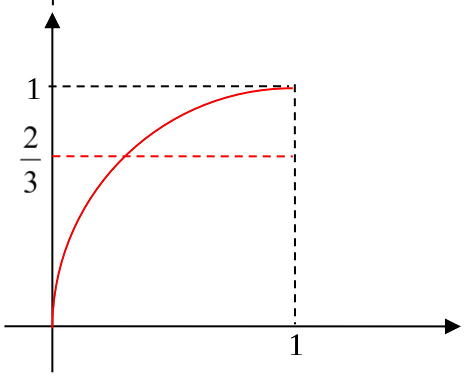
3) Data la funzione $f(x) = x^2$ determinarne il valor medio nell'intervallo [0,1]

$$v_m = \frac{\int_0^1 x^2dx}{1} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$



4) Data la funzione $f(x) = -x(x-2)$ determinarne il valor medio nell'intervallo [0,1]

$$v_m = \frac{-\int_0^1 x(x-2)dx}{1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

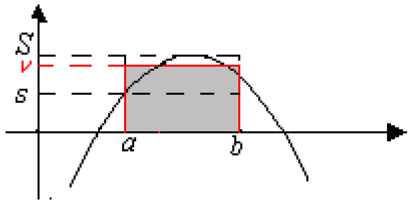


Teorema 23.1

Ipotesi: $f(x)$ ***integrabile*** in $[a,b]$, con $a \neq b$, siano $s=\inf(f)$ e $S=\sup(f)$

Tesi:

$$s \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le S$$



Dimostrazione:

$$\int_a^b s dx \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le \int_a^b S dx$$

$$s(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le S(b-a)$$

da cui la tesi.

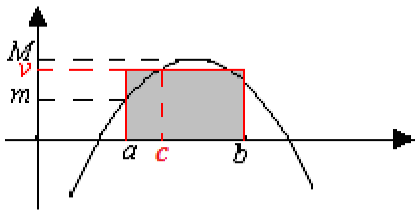
Teorema 23.2 ***Teorema della media integrale***

Ipotesi: $f(x)$ ***continua*** in $[a,b]$, con $a \neq b$, e $m=\min(f)$ e $M=\max(f)$

Tesi:

1) $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$

2) $\exists c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$



Dimostrazione:

Per il teorema di Weierstrass inf e sup sono rispettivamente minimo e massimo della funzione quindi, per il precedente teorema 23.1, la tesi 1 è dimostrata.

Per il teorema di Darboux dalle ipotesi si deduce immediatamente la tesi 2, in quanto il valor medio è un valore compreso fra minimo e massimo della funzione nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

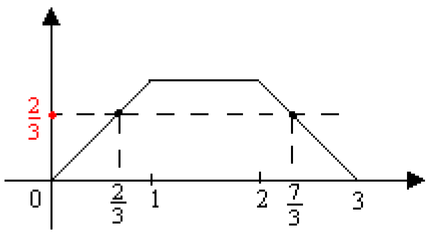
Esempio 23.2

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 1 & 1 \le x \le 2 \\ -x+3 & x > 2 \end{cases}$$

il valor medio nell'intervallo [0,3] è

$$v = \frac{\int_0^3 f(x)dx}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

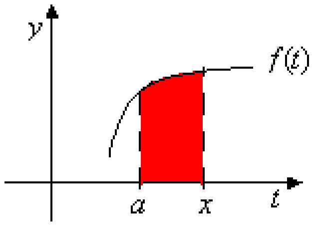


Tale valore è assunto in due punti:

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad x = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

Definizione 23.2
Data una funzione $f(x)$ integrabile in un intervallo chiuso I, dicesi ***funzione integrale*** relativa al punto a una funzione F così definita

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad x,a\in I$$



La funzione integrale è quindi una funzione ottenuta facendo variare il secondo estremo di integrazione.

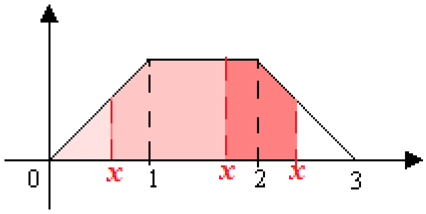
Il valore nel primo estremo di integrazione della funzione integrale di una funzione integrabile è 0; infatti

$$F(a)=\int_a^a f(t)dt=0$$

In alcuni casi è possibile il calcolo della funzione integrale utilizzando ragionamenti di tipo geometrico, ma non è semplice; infatti bisogna distinguere vari casi a seconda che il valore variabile x sia alla sinistra o alla destra del valore fisso.

Esempio 23.2 (continua)
Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ 1 & 1\le x\le 2 \\ -x+3 & x>2 \end{cases}$$



La funzione integrale nell'intervallo [0,3] è

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases} \int_0^x tdt=\dfrac{x^2}{2} & per\ 0\le x\le 1 \\ \int_0^1 tdt+\int_1^x dt=\dfrac{1}{2}+(x-1)=\dfrac{2x-1}{2} & per\ 1<x\le 2 \\ \int_0^1 tdt+\int_1^2 dt+\int_2^x(-t+3)dt=\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{x^2}{2}+3x-4\right) & per\ 2<x\le 3 \end{cases}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale o di Torricelli-Barrow

Teorema 23.3

Ipotesi: $f(x)$ **continua** in I aperto.

Tesi: La funzione integrale

$$F(x)=\int_{x_0}^x f(t)dt \quad x,x_0\in I$$

è derivabile e $F'(x)=f(x)$ per ogni x appartenente a I.

Esempio 23.3

$F(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2}dt \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x^2}$ cioè $F(x)$ è una primitiva di $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

Dimostrazione

Il rapporto incrementale di $F(x)$ per $h \to 0$ è

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{h}=$$

$$=\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{x+h} f(t)dt-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{h}=\frac{\int_{x}^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Per il teorema della media integrale esiste $c \in [x,x+h]$ tale che il rapporto incrementale è uguale a $f(c)$. Per la continuità di $f(x)$ la derivata di $F(x)$ è quindi

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{x}^{x+h} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$$

Osservazione Il teorema fondamentale del calcolo integrale stabilisce un collegamento fra integrale definito e integrale indefinito; afferma infatti che **se la funzione integranda è continua** la funzione integrale è una primitiva della funzione integranda ovvero

$$\int f(x)dx=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+c \quad c\in R$$

Una **conseguenza importante** del teorema fondamentale del calcolo integrale è la seguente

Corollario Se $\varphi(x)$ è una primitiva di $f(x)$ per $x\in I$ allora, dati due punti $a,b\in I$, è possibile calcolare l'integrale definito in questo modo:

$$\int_a^b f(t)dt=[\varphi(x)]_a^b=\varphi(b)-\varphi(a)$$

Dimostrazione

Si osserva che $\varphi(b)+c-(\varphi(a)+c)=\varphi(b)-\varphi(a)$ quindi la differenza non dipende da quale primitiva si usi. Si consideri la primitiva $\varphi(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, calcolando nei punti a e b si ha

$$\varphi(a)=\int_{x_0}^{a} f(t)dt$$

$$\varphi(b)=\int_{x_0}^{b} f(t)dt$$

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^{x_0} f(t)dt+\int_{x_0}^{b} f(t)dt=-\int_{x_0}^{a} f(t)dt+\int_{x_0}^{b} f(t)dt=\varphi(b)-\varphi(a)$$

Esempi 23.4

1. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

2. Calcolare le funzione integrali $F(x)=\int_0^x tdt$ e $G(x)=\int_1^x tdt$

Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale a $f(x)=x$ per ogni x reale si ottiene.

$$F(x) = \int_0^x t\,dt = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2},\ G(x) = \int_1^x t\,dt = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Si osserva che $F(x) = G(x) + c$ dove $c = \frac{1}{2} = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$ quindi sono entrambe primitive di $f(x)$.

Arrivati a questo punto è utile riassumere le proprietà della ***funzione integrale*** anche alla luce del teorema fondamentale del calcolo integrale.

1. La *funzione integrale* esiste in [*a*,*b*] se e solo se la funzione integranda è integrabile in [*a*,*b*].

2. Una *funzione integrale* definita in [*a*,*b*] è sempre ***continua*** in [*a*,*b*].

Dimostrazione

Sia $f(x)$ integrabile in I, sia $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad a,x\in I$, per ogni $x_0, x_0+h\in I$ si ha

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Per dimostrare che $F(x_0)$ è continua bisogna provare che

$$\lim_{h\to 0} F(x_0+h)-F(x_0)=\lim_{h\to 0}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt=0.$$

Dalla definizione di Riemann

$$mh\le\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\le Mh$$

dove m, M sono rispettivamente estremo inferiore e estremo superiore di f in [*a*,*b*].

Concludendo poiché

$$\lim_{h\to 0} mh=\lim_{h\to 0} Mh=0$$

per il teorema del confronto,

$$\lim_{h\to 0}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt=0 \quad \text{per ogni} \quad x_0, x_0+h\in l$$

CVD

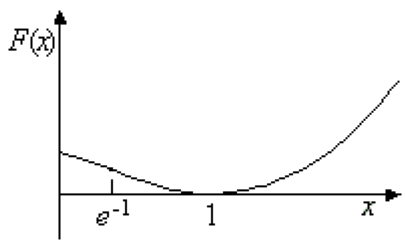
3. Una *funzione integrale* definita in [*a*,*b*] è ***derivabile*** **se la funzione integranda è** ***continua*** in [*a*,*b*] (Teorema fondamentale del calcolo integrale).

Osservazione 1 Dalle proprietà 2. e 3. si deduce che lo studio della funzione integrale di una funzione continua si può eseguire senza necessariamente calcolarne la forma esplicita; infatti nello studio di funzione, più che il valore della funzione stessa si richiede il valore delle derivate successive e i punti in cui si annulla.

Esempio 23.5

L'andamento della funzione $F(x)=\int_1^x t\ln t dt$ si può ricavare senza risolvere l'integrale; infatti

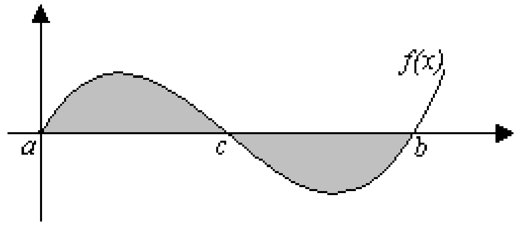
- C.E.: R_0^+ ; infatti, poiché l'estremo di integrazione fisso è 1>0, per escludere lo 0, bisogna considerare solo $x>0$.
- $F(1)=\int_1^1 t\ln t dt=0$.
- $F'(x)=x\ln x$ quindi $F'(x)=0$ per $x=1$, $F''(x)=\ln x+1$ quindi $F''(1)>0$ (1 punto di minimo locale) e $F''(x)=0$ per $x=e^{-1}$ (e^{-1} punto di flesso discendente perché $F'(e^{-1}) = -e^{-1}<0$).



Calcolo di aree

Abbiamo più volte osservato come l'integrale definito relativo a una $f(x)$ non negativa e con estremi $a<b$ è l'area della regione delimitata dal grafico di $f(x)$ in $[a,b]$ e dall'asse x.
Se la funzione ha segno qualsiasi la regione delimitata dal grafico e dall'asse x non giace tutta nel semipiano positivo delle y, è però misurabile considerando la somma di più integrali.

Per esempio, se l'area A da calcolare è quella rappresentata in figura



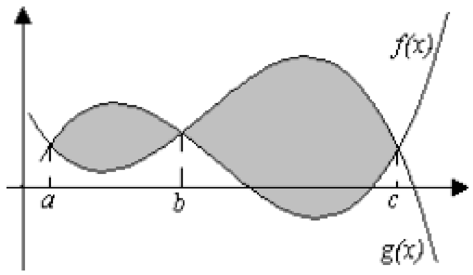
si avrà:

$$A=\int_a^b |f(x)|dx=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx$$

Se l'area da calcolare è compresa fra i grafici di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, si dovranno individuare i punti di intersezione fra i grafici delle due funzioni e studiare il segno della loro differenza.
L'area si calcola come somma di integrali in cui la funzione integranda è la differenza fra la funzione maggiore meno quella minore indipendentemente dal segno delle due funzioni.

Per esempio, se l'area A da calcolare è quella rappresentata in figura si avrà:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx+\int_b^c [g(x)-f(x)]dx$$



Esempio 23.6
Calcolare l'area compresa fra il grafico delle due funzioni per $x \geq 0$

$$f(x)=\ln(x+2)$$
$$g(x)=-\ln(x+0.1)$$
$$f(x)=g(x) \Rightarrow \ln(x+2)=-\ln(x+0.1)$$
$$x+2=\frac{1}{x+0.1} \Rightarrow x^2+2.1x-0.8=0$$

x=-2. 4293, x=. 3293

$$A(f,g)\cong\int_0^{0.3293}|\ln(t+2)+\ln(t+0.1)|dt \cong 0.2087$$