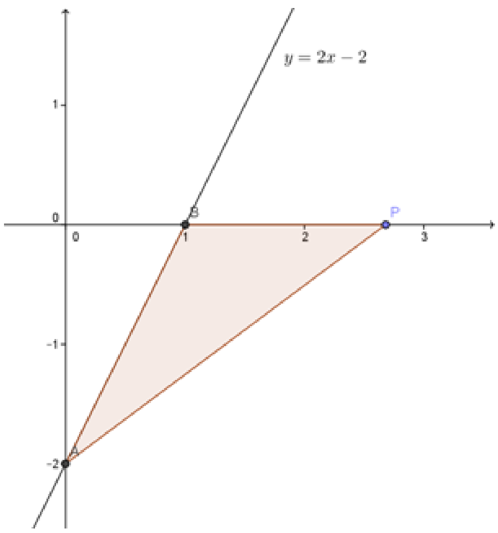
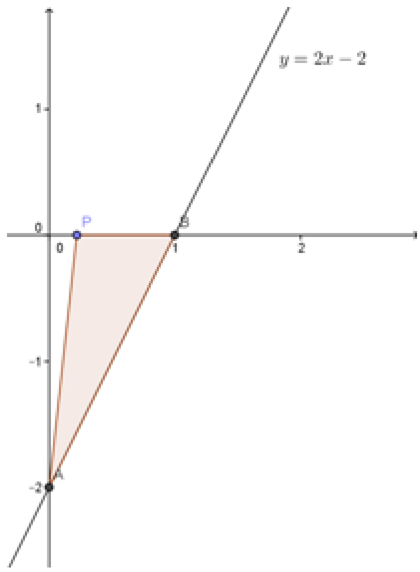
SOLUZIONI ESERCIZI INSIEMI NUMERICI

1. Per calcolare il valore dell'espressione $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+x$ per $x=2$ e $y=3$ si propongono qui di seguito due procedimenti con due risultati differenti. Scegliere il risultato corretto e spiegare perché.
   a) $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+x=\sqrt{4-12+9}+2=1+2=3$
   b) $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+x=\sqrt{(x-y)^2}+x=x-y+x=2x-y=1$
   Risposta
   Il risultato corretto è 3; infatti nel secondo caso invece di $\sqrt{(x-y)^2}=x-y$ si sarebbe dovuto scrivere $\sqrt{(x-y)^2}+x=|x-y|+x=|2-3|+2=3$.

2. Se per risolvere l'equazione $\sqrt{x+1}=-x$ si propone il seguente ragionamento: "il primo membro è sempre non negativo; l'espressione al secondo membro è sempre negativa, quindi l'equazione non ha soluzione".
   Il ragionamento è corretto? Se no, dov'è l'errore?
   Risposta
   Il ragionamento **non è corretto perché** è vero che $\sqrt{x+1}\geq 0$ ma in generale non è vero che –*x*<0; infatti vale solo per *x* positivo: $-x<0 \Leftrightarrow x>0$.

3. Sia P un punto sull'asse delle ascisse e siano A e B le intersezioni con l'asse delle ascisse e con l'asse delle ordinate della retta di equazione *y*=2*x*-2. Esprimere in funzione di *x* l'area del triangolo APB.
   Risposta
   Si calcolano le coordinate dei punti *A*(0,-2) e *B*(1,0) e si osserva che il triangolo *APB* ha base *BP* e altezza 2. Indicando con *x* l'ascissa di *P* si ha che l'area del triangolo è: $S=|x-1|$.
   Attenzione ci vuole il valore assoluto perché il punto *P* potrebbe precedere *B*, in tal caso la differenza *x*-1 risulterebbe negativa.

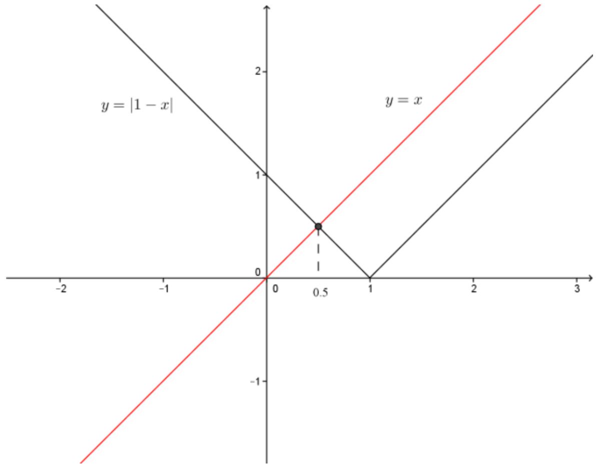




4. Risolvere le seguenti equazioni.
Risposte

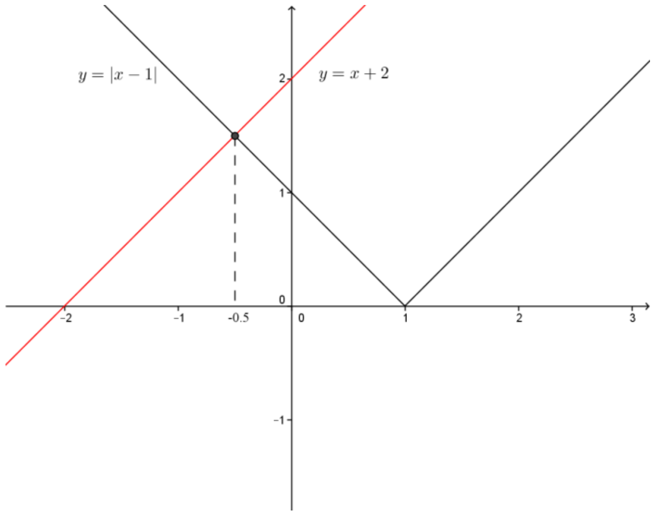
a) $|1-x| = x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=x \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1+x=x \\ 1-x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ x \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -1=0 \\ x>1 \end{cases}$

Concludendo l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $x=\frac{1}{2}$; la stessa cosa si vede nella rappresentazione grafica



b) $\sqrt{(x-1)^2} = x+2 \Leftrightarrow |x-1| = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=x+2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x+1=x+2 \\ x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=2 \\ x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x=-1 \\ x<1 \end{cases}$

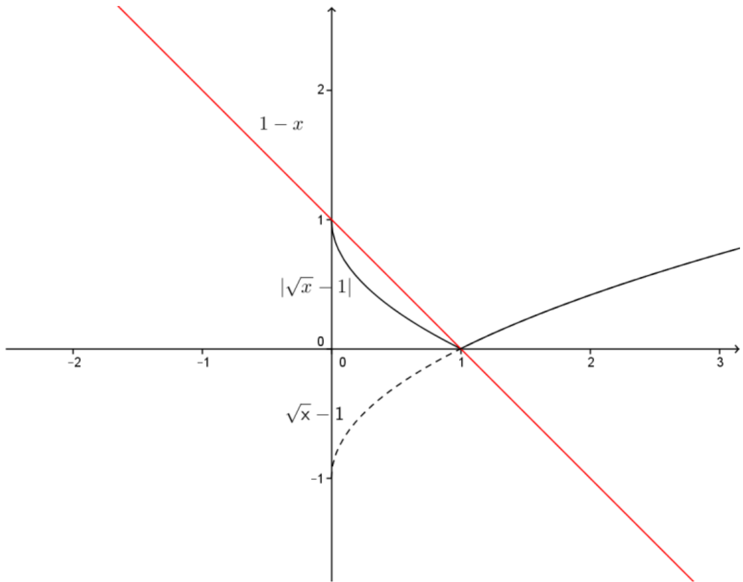
Concludendo l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $x=-\frac{1}{2}$; la stessa cosa si vede nella rappresentazione grafica



c) $\left|\sqrt{x}-1\right| = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=1-x \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -\sqrt{x}+1=1-x \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=x+2 \\ x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x}=x \\ 0 \leq x<1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+4=0 \\ x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-x=0 \\ 0 \leq x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+4=0 \\ x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-x=0 \\ 0 \leq x<1 \end{cases}$

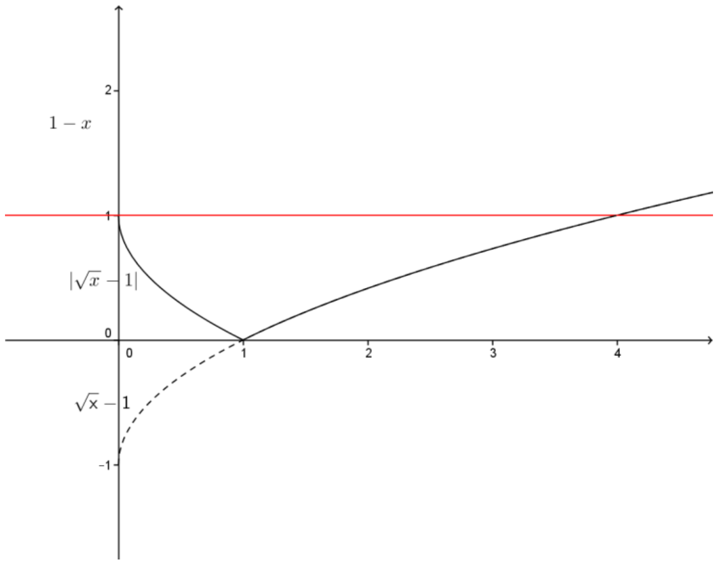
Concludendo l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $x=0 \vee x=1$; la stessa cosa si vede nella rappresentazione grafica



Per curiosità, cosa succede all’equazione $\left|\sqrt{x}-1\right|=1$?

$$\left|\sqrt{x}-1\right|=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-1=1\\ x\geq 0\\ \sqrt{x}-1\geq 0\end{cases} \vee \begin{cases}-\sqrt{x}+1=1\\ x\geq 0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=2\\ x\geq 1\end{cases} \vee \begin{cases}\sqrt{x}=0\\ 0\leq x<1\end{cases}$$

Concludendo l’insieme delle soluzioni dell’equazione è $x=4 \vee x=0$; la stessa cosa si vede nella rappresentazione grafica



5. Sapendo che il modulo di un numero complesso è $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$, calcolare le seguenti espressioni nel campo complesso

Risposte

a) $|2+3i|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\cong 3.6$

b) $|2.5+16.3i|=\sqrt{6.25+265.69}=\sqrt{271.94}\cong 16.49$

c) $\left|(1+2i)^3\right|=\left|1+6i+12i^2+8i^3\right|=|1+6i-12-8i|=|-11-2i|=\sqrt{121+4}=\sqrt{125}\cong 11.18$

6. Determinarne l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo degli insiemi:

Risposte

a)

$$A=\left\{x\in\mathbb{R} : x=\frac{1}{n+1} \wedge n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

A è un insieme limitato: 0 è minorante di *A* e 1 è maggiorante di *A*; infatti

$$0<\frac{1}{n+1}\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases}n+1>0\\ n+1\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow n\geq 0$$ vera per ogni numero naturale n.

Dalla rappresentazione sulla retta reale si osserva che

- 0 è il massimo dei minoranti quindi 0=inf*A* ma non è min*A*;
- 1 è il minimo dei maggioranti quindi 1=sup*A*=max*A*.

b)

$$A=\left\{x\in \mathbb{R} : x=\frac{n-1}{n} \wedge n\in \mathbb{N}_0\right\}=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4},\ldots\right\}$$

A è un insieme limitato: 0 è minorante di A e 1 è maggiorante di A; infatti

$$0<\frac{n-1}{n}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} n-1\ge 0 \\ n-1<n \end{cases} \Leftrightarrow n\ge 1 \ .$$

Dalla rappresentazione sulla retta reale si osserva che

- 0 è il massimo dei minoranti quindi 0=inf$A$=min$A$;
- 1 è il minimo dei maggioranti quindi 1=sup$A$ ma non è max$A$.

c)

$$A=\left\{x\in \mathbb{R} : x=\ln\frac{1}{n} \wedge n\in \mathbb{N}_0\right\}=\left\{0, \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{3},\ldots\right\}=\{0, -\ln 2, -\ln 3,\ldots\}$$

A è un insieme limitato superiormente ma non inferiormente: 0 è maggiorante di A ma non esistono minoranti; infatti $\ln\frac{1}{n}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n>0 \\ \frac{1}{n}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow n>0$.

Dalla rappresentazione sulla retta reale si osserva che

- 0 è il minimo dei maggioranti quindi 0=sup$A$=min$A$;
- Non esiste un minorante quindi inf$A$=-∞.

d) $A=\{x\in \mathbb{R} : 1<x\le 3 \vee 5<x<7 \vee x=8\}$

Sup A = Max A = 8, Inf A = 1, non esiste Min A.

7. Per ognuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme immagine o codominio e di questo l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo.
Risposte
Per rispondere è necessario disegnare il grafico di f e determinarne il codominio sull'asse y.

a) $f(x)=3x-1$ nell'intervallo $X=(0,4)$
Im $f(x)$ = (–1, 11), Sup A = 11, Inf A = –1 non esistono Min A e Max A.

b) $f(x)=x^2-2x$ nell'intervallo $X=(0,+\infty)$
Im $f(x)$ = [–1, +∞), Sup A = + ∞, Inf A = –1, Min A = –1 non esiste Max A.

c) $f(x)=e^x+1$ in R
Im $f(x)$ = (0, +∞), Sup A = + ∞, Inf A = 0 non esistono Min A e Max A.

d) $f(x)=\ln(x)$ nell'intervallo $X=(0,1]$
Im $f(x)$ = (–∞ , 0], Sup A = 0 = Max A, Inf A = –∞ , non esiste Min A.

e) $f(x)=\ln(x+2)$ nell'intervallo $X=(0,+\infty)$
Im $f(x)$ = (ln2, +∞), Sup A = + ∞, Inf A = ln2 e non esistono Min A e Max A.

f) $f(x)=\frac{1}{x-3}$ nell'intervallo $X=(3,4)$.
Im $f(x)$ = (1, +∞), Sup A = + ∞, Inf A = 1 non esistono Min A e Max A.