**ESERCIZI 03 – FUNZIONE INVERSA, FUNZIONE COMPOSTA, TOPOLOGIA E DEFINIZIONE DI LIMITE**

1. Date le seguenti funzioni definite in *R ,* determinare un insieme *A* dove sono invertibili e disegnarne il grafico a partire da quello di *f*.
	1. 
	2. 
	3. 
	4. 
	5. 

Soluzioni

1. 
*f*  è strettamente monotona crescente per ogni  quindi è invertibile in *A*=*R* con codominio *R*.
2. 
*f*  è strettamente monotona crescente per  quindi è invertibile in  con dominio e codominio.
*
f*  è strettamente monotona decrescente per  quindi è invertibile in  con dominio e codominio.

3. 


*f*  è strettamente monotona crescente per  quindi è invertibile in  con dominio e codominio.


*f*  è strettamente monotona decrescente per  quindi è invertibile in  con dominio e codominio.


1. 

 *f*  è strettamente monotona crescente per  quindi è invertibile in  con dominio e codominio. Si osserva che *f* è continua ma l’inversa di *f* in *A* non è continua



1. 



La funzione è invertibile in  anche se in tale intervallo non è strettamente monotona, questo può succedere infatti *f* non è continua in *A* e la corrispondenza è biunivoca.



1. Date le seguenti coppie di funzioni scrivere le funzioni composte  determinandone il dominio
	1.  e 
	
	
	2.  e 
	
	
	3.  e 
	
	
	4.  e 
	
	
	5. 
	
	
2. Dati i seguenti insiemi determinare:
* l'insieme dei punti interni;
* l'insieme dei punti di frontiera;
* l'insieme dei punti di accumulazione.
	1. 
* l'insieme dei punti interni è ;
* l'insieme dei punti di frontiera è ;
* l'insieme dei punti di accumulazione è ;

	1. 

L'insieme dato equivale a pertanto si ha che

* l'insieme dei punti interni è l'insieme vuoto;
* l'insieme dei punti di frontiera è l'insieme stesso;
* l'insieme dei punti di accumulazione è l'insieme vuoto;

	1. 
* L'insieme dei punti interni è ;
* l'insieme dei punti di frontiera è con *h*  2;
* l'insieme dei punti di accumulazione è ;

	1. 
* L'insieme dei punti interni è ;
* l'insieme dei punti di frontiera è con *h*   1;
* l'insieme dei punti di accumulazione è ;

	1. 
* L'insieme dei punti interni è ;
* l'insieme dei punti di frontiera sono i punti del quadrato in figura ossia dove

;

* l'insieme dei punti di accumulazione è ;

	1. 
* L'insieme dei punti interni è l'insieme stesso *A*;
* l'insieme dei punti di frontiera è ;
* l'insieme dei punti di accumulazione è ;

	1. 
* L'insieme dei punti interni è;
* l'insieme dei punti di frontiera è ;
* l'insieme dei punti di accumulazione è l'insieme stesso *A*;

	1. 
* L'insieme dei punti interni è l'insieme stesso *A*;
* l'insieme dei punti di frontiera è ;
* l'insieme dei punti di accumulazione è ;
1. Verificare i seguenti limiti usando la definizione.

a) 
Si osserva che il dominio di è  quindi dalla definizone si deve verificare se


si può anche dire che ossia .

Poiché si può supporre *x* <2 quindi, moltiplicando per *x* − 2 si ha il sistema



Senza perdere di generalità si può supporre quindi si ottieneche, poiché , è un intorno di 0 e il limite **è verificato**.

b) 
 Si osserva che il dominio di è  quindi dalla definizione si deve verificare se


si può anche dire che ossia .

Per *ε* > 6 la disequazione è verificata per ogni *x,* se  *ε* ≤ 6 si ha il sistema
.

Si osserva che né né rappresentano un’intorno di 2 quindi il limite **non è verificato**.

c) 
Si osserva che il dominio di è  quindi dalla definizione si deve verificare se


si può anche dire che ossia .

Poiché si cerca un intorno di +∞, si suppone , quindi la disequazione diventa il sistema

con .

Si osserva che *a* cresce al decrescere di *ε* e il limite **è verificato**.

d) 
Si osserva che il dominio di è  e che

alla “sinistra” di 1 la funzione è negativa e alla “destra” di 1 la funzione è positiva, i limiti saranno diversi a meno che non siano entrambi 0.

Verifichiamo che il limite da sinistra è -∞ ossia che per la definizione di limite da sinsitra equaivale a 

si può anche dire che .
Per comodità di calcolo si suppone *a*>0 e si può considerare la disequazione con *a*>0; infatti si osserva che .

con *a*>0 equivale a .

Se si considera in un intorno sinistro di 1, l'espressione  risulta negativa e pertanto si ha il sistema , la cui soluzione è  che rappresenta un intorno sinistro di 1, quindi  è verificato (nello stesso modo si può verificare che ) .

Si deduce che, essendo il limite da sinistra diverso dal limite da destra, **non esiste**.

e) 

 Si osserva che il dominio di è tutto ***R*** quindi dalla definizone si ha:



si può anche dire che .
 equivale a  ossia o .

Quindi se allora comunque si scelga *a* e il limite **è verificato**.