ESERCIZI 04 – CALCOLO DI LIMITI

1. Per ciascuna delle seguenti funzioni calcolare, se esistono, i limiti per x tendente ai valori indicati a fianco.

   a. $f(x) = x^3 + x^2 - 3\sqrt{x}$ per $x_0 = 0, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty$

   $\lim_{x \to 0}\left(x^3 + x^2 - 3\sqrt{x}\right) = 0$, $\lim_{x \to +\infty}\left(x^3 + x^2 - 3\sqrt{x}\right) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty}\left(x^3 + x^2 - 3\sqrt{x}\right) = -\infty$

   $D_f = R^+$ i limiti nei punti di accumulazione non appartenenti in D_f sono compresi nei precedenti.

   b. $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ per $x_0 = 1, x_0 = 2, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty$

   $\lim_{x \to 0}\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2}$, $\lim_{x \to 2}\dfrac{1}{2-x}$ non esiste tuttavia $\lim_{x \to 2^+}\dfrac{1}{2-x} = -\infty$ e $\lim_{x \to 2^-}\dfrac{1}{2-x} = +\infty$,

   $\lim_{x \to +\infty}\dfrac{1}{2-x} = 0^-$, $\lim_{x \to -\infty}\dfrac{1}{2-x} = 0^+$

   $D_f = R \setminus \{2\}$ i limiti nei punti di accumulazione non appartenenti in D_f sono compresi nei precedenti.

   c. $f(x) = x - \mathrm{sen}x$ per $x_0 = 0, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty$

   $\lim_{x \to 0}(x - \mathrm{sen}x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty}(x - \mathrm{sen}x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty}(x - \mathrm{sen}x) = -\infty$; infatti è vero che $\lim_{x \to \pm\infty}\mathrm{sen}x$ non esiste, tuttavia sen$x$ è limitata quindi trascurabile per $x \to \pm\infty$.

   $D_f = R$ i limiti nei punti di accumulazione non appartenenti in D_f sono compresi nei precedenti.

   d. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ per $x_0 = 1, x_0 = 2, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty$

   $\lim_{x \to 1}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x-2) = -1$,

   $\lim_{x \to 2}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \to 2}(x-2) = 0$,

   $\lim_{x \to +\infty}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -\infty$

   $D_f = R \setminus \{1\}$ i limiti nei punti di accumulazione non appartenenti in D_f sono compresi nei precedenti.

   e. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2-x}$ per $x_0 = 1, x_0 = 2, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty$

   $\lim_{x \to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2-x}\right) = \lim_{x \to 1}\dfrac{1}{(x-1)(2-x)}$ non esiste, tuttavia $\lim_{x \to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)(2-x)} = +\infty$ e

   $\lim_{x \to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)(2-x)} = -\infty$

   $\lim_{x \to 2}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2-x}\right) = \lim_{x \to 2}\dfrac{1}{(x-1)(2-x)}$ non esiste, tuttavia $\lim_{x \to 2^+}\dfrac{1}{(x-1)(2-x)} = -\infty$ e

$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-1)(2-x)} = +\infty$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{(x-1)(2-x)} = 0^-$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{(x-1)(2-x)} = 0^-$

$D_f = R \setminus \{1,2\}$ i limiti nei punti di accumulazione non appartenenti a D_f sono compresi nei precedenti.

2. Individuare se i seguenti limiti sono forme di indecisione e, eventualmente, di che tipo e, se possibile, calcolarli:

a. $\lim_{x\to 0}\left(3-\frac{1}{2-x}\right)$ non è una forma di indecisione $\lim_{x\to 0}\left(3-\frac{1}{2-x}\right) = 3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

b. $\lim_{x\to 0}\left(3-\frac{1}{2x}\right)$ non esiste, tuttavia esistono i limiti da destra e da sinistra che non sono forme di indecisione $\lim_{x\to 0^+}\left(3-\frac{1}{2x}\right) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-}\left(3-\frac{1}{2x}\right) = +\infty$.

c. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3^x}{\frac{1}{x}-2}\right)$ non è una forma di indecisione $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3^x}{\frac{1}{x}-2}\right) = -\infty$; infatti

$\lim_{x\to +\infty} 3^x = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}-2\right) = -2$.

d. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3^{-x}}{x-2}\right)$ non è una forma di indecisione $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3^{-x}}{x-2}\right) = 0^+$; infatti

$\lim_{x\to +\infty} 3^{-x} = 0^+$, $\lim_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty$.

e. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3^{-x}}{x-2}\right)$ è una forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; infatti

$\lim_{x\to -\infty} 3^{-x} = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty}(x-2) = -\infty$ il limite non è calcolabile in modo elementare ma risulta essere $-\infty$.

f. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1-3x+5x^3}{1-\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x}}\right)$ è una forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; infatti

$\lim_{x\to +\infty}\left(1-3x+5x^3\right) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty}\left(1-\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x}\right) = -\infty$, il limite è calcolabile

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1-3x+5x^3}{1-\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x}}\right) = +\infty$

g. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-3x+5x^3}{1-\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x}}\right)$ non è una forma di indecisione $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-3x+5x^3}{1-\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x}}\right) = 1$

h. $\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(4x+1)}{1-\sqrt{x}}\right)$ è una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$; infatti $\lim_{x\to1}(x-1)(4x+1)=0$ e $\lim_{x\to1}\left(1-\sqrt{x}\right)=0$, il limite è calcolabile scomponendo opportunamente il numeratore.
Si ricordi che se *a* è una delle sue radici allora il polinomio è scomponibile e (*x*-*a*) è uno dei fattori; in questo caso il numeratore si annulla per *x*=1 quindi 1 è una delle radici, la seconda si trova o dividendo per (*x*-1) o risolvendo l'equazione di 2° grado.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(4x+1)}{1-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(4x+1)}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)(4x+1)}{1-\sqrt{x}}=$$
$$=-\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x}+1\right)(4x+1)=-10$$

i. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)(2x+1)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(2x+1)}{(x+3)}=\frac{3}{2}$
quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x\to1$.

j. $f(x)=x^3-x^2+2x-2$, $g(x)=x^3-1$ per $x\to1$

$\lim_{x\to1}\left(x^3-x^2+2x-2\right)=\lim_{x\to1}\left(x^2+2\right)(x-1)=0$, $\lim_{x\to1}\left(x^3-1\right)=\lim_{x\to1}(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$
Per $x\to1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+2\right)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2}{x^2+x+1}=1$
quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x\to1$ inoltre, poiché il limite del rapporto è 1, si può dire che sono in relazione di asintotico o semplicemente asintotici per $x\to1$.

k. $f(x)=x^3-x^2+2x-2$, $g(x)=x^4-1$ per $x\to1$
$\lim_{x\to1}\left(x^3-x^2+2x-2\right)=\lim_{x\to1}\left(x^2+2\right)(x-1)=0$, $\lim_{x\to1}\left(x^4-1\right)=\lim_{x\to1}(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)=0$
Per $x\to1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+2\right)(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{3}{4}$
quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x\to1$, non si può dire che sono asintotici per $x\to1$.

3. Ricordando che l'unico punto di accumulazione per il dominio di una successione è +∞, calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti successioni.

a. $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1^-$

b. $a_n = 1 - \frac{1}{n^{-2}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{-2}}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - n^2\right) = -\infty$

c. $a_n = (-1)^n - \frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left((-1)^n - \frac{1}{n^2}\right)$ non esiste; infatti $a_n = b_n + c_n$ dove $b_n = (-1)^n = \{1,-1,1,-1,\dots\}$ non ammette limite e $c_n = -\frac{1}{n^2}$ convergente a 0.

d. $a_n = (-1)^n - \frac{1}{n^{-2}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left((-1)^n - \frac{1}{n^{-2}}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left((-1)^n - n^2\right) = -\infty$; infatti $a_n = b_n + c_n$ dove $b_n = (-1)^n = \{1,-1,1,-1,\dots\}$ non ammette limite ma è limitata (sup=1, inf=-1) e $c_n = -n^2$ divergente a -∞.

e. $a_n = 1 - (-1)^{-n} \frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - (-1)^n \frac{1}{n^2}\right) = 1$; infatti $b_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ è convergente a 0.

f. $a_n = 1 - \left(\frac{1}{n^2}\right)^{-n}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{n^2}\right)^{-n}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - n^{2n}\right) = -\infty$; infatti n^{2n} è maggiorante della successione n^2 divergente a +∞.