

ESERCIZI 04 – CALCOLO DI LIMITI

1. Verificare che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi per $x \rightarrow x_0$.

Quindi determinare se per $x \rightarrow x_0$: $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine oppure $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore o inferiore a $g(x)$.

a. $f(x) = (x-1)^{1/2}$, $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ per $x \rightarrow 1$

$f(x) = (x-1)^{1/2}$ è definita per $x \geq 1$ quindi esiste solo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{1/2} = 0^+,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{1/3} = 0$$

Per $x \rightarrow 1^+$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^{1/2}}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^{1/2}}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{6}} = 0^+$$

quindi $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

b. $f(x) = (x-1)^{-1/2}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ per $x \rightarrow +\infty$

$f(x) = (x-1)^{-1/2}$ è definita per $x > 1$ quindi $+\infty$ è punto di accumulazione del

$$\text{dominio } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^{-1/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0^+,$$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ è definita per $x \neq 1$ quindi $+\infty$ è punto di accumulazione del

$$\text{dominio } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^{-1/3} = 0^+$$

Per $x \rightarrow +\infty$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^{1/3}}{(x-1)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^{-\frac{1}{6}} = 0$$

quindi $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

Si osservi che il risultato è coerente con quello dell'esercizio a).

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$, è definita per $\sqrt{x-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-x\sqrt{x}) \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$

quindi $+\infty$ è punto di accumulazione del dominio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = 0^-$,

$g(x) = \frac{1}{x}$ è definita per $x \neq 0$ quindi $+\infty$ è punto di accumulazione del dominio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

Per $x \rightarrow +\infty$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno

dello stesso ordine si calcola
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x} - x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x} - x^2} = 0^-$$

quindi $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

Nei seguenti esercizi $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi quindi valore reale compreso $+\infty$ e $-\infty$ sono punti di accumulazione del loro dominio.

d. $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4x)$, $g(x) = x^3 + 1$ per $x \rightarrow -1$,
$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1)(x^2 - 4x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 1) = 0$$

Per $x \rightarrow -1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4x)}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)x(x-4)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)x(x-4)}{(x^2 - x + 1)} = -\frac{10}{3}$$

quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \rightarrow -1$.

e. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$ per $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x^2 - 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)(2x + 1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 4x - 6) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x+3) = 0$$

Per $x \rightarrow 1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(2x + 1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(2x+1)}{(x+3)} = \frac{3}{2}$$

quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \rightarrow 1$.

f. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$, $g(x) = x^3 - 1$ per $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + 2x - 2) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)(x-1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Per $x \rightarrow 1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello

stesso ordine si calcola
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1} = 1$$

quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \rightarrow 1$ inoltre, poiché il limite del rapporto è 1, si può dire che sono in relazione di asintotico o semplicemente asintotici per $x \rightarrow 1$.

g. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$, $g(x) = x^4 - 1$ per $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + 2x - 2) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)(x - 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

Per $x \rightarrow 1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{4}$ quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \rightarrow 1$, non si può dire che sono asintotici per $x \rightarrow 1$.

2. Studiare la continuità delle seguenti funzioni nel loro dominio e nei punti di frontiera.

a. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

La funzione è continua per ogni valore di x del dominio \mathbf{R}

b. $f(x) = \frac{x^2 + |x| - 2}{|x - 1|}$

La funzione è continua per ogni valore di x del dominio

$$D_{f(x)} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

c. $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

La funzione è continua per ogni valore di x del dominio

$$D_{f(x)} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

d. $f(x) = x \ln \frac{1}{x^2}$

La funzione è continua per ogni valore di x del dominio

$$D_{f(x)} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

e. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1|} & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ e^{-x} & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$

La funzione è continua per ogni valore di x del dominio

$$D_{f(x)} = [-2, 1) \cup (1, 4]$$

f. $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 - 1)}{(x + 1)^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (x - 1)^{x^2 - 1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

La funzione è continua per ogni valore di x del dominio

$$D_{f(x)} = (0, +\infty)$$

3. Determinare la natura dei punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

g. $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{|x - 1|}$ $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

$x = 1$ punto di discontinuità **non eliminabile** (II specie).

h. $f(x) = \frac{1}{1 - 2^{\frac{x+3}{x}}}$

$x = 0$ punto di discontinuità **non eliminabile** (I specie, a salto),

$x = -3$ punto di discontinuità **non eliminabile** (II specie).

i. $f(x) = \frac{1-x}{2x^2 - x - 1}$

$x = 1$ punto di discontinuità **eliminabile** (III specie),

$x = -1/2$ punto di discontinuità **non eliminabile** (II specie).

j. $f(x) = \frac{|1-4x|}{4x-1}$

$x = 0$ punto di discontinuità **eliminabile** (III specie).

$x = 1/4$ punto di discontinuità **non eliminabile** (I specie, a salto).