ESERCIZI 05 – CONTINUITA' E DERIVABILITA'

1) Date le seguenti funzioni determinare se sono verificate le ipotesi dei teoremi di Weierstrass e Darboux nell'intervallo indicato e, nel caso siano applicabili, determinare la/le controimmagini dei valori y_0 indicati ossia il/i valori di x per cui $f(x)=y_0$. Suggerimento: risolvere l'equazione $f(x)=y_0$ nell'intervallo indicato.

   a. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $[-2,2]$, $y_0=1$
   b. $f(x)=\sqrt{|x^2-1|}$, $[0,2]$, $y_0=1$
   c. $f(x)=\ln(x+1)$, $[0,2]$, $y_0=1$
   d. $f(x)=(x-1)^2+1$, $[0,2]$, $y_0=2$

2) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni, nei punti assegnati come limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{h}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
   a. $f(x)=2x^2-2$, $x_0=0$
   b. $f(x)=\ln 2x$, $x_0=2$
   c. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x_0=2$
   d. $f(x)=e^{3x}$, $x_0=1$
   e. $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$, $x_0=-1$
   f. $f(x)=\sqrt{3-x}$, $x_0=2$

3) Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni utilizzando le regole di derivazione.
   a. $f(x)=2e^{4x+1}$
   b. $f(x)=\ln(x-3x^2)$
   c. $f(x)=x^2\ln(x+5x^2)$
   d. $f(x)=\text{sen}^2 x - x^2$
   e. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2}$

4) Determinare, se possibile, le equazioni delle rette tangenti alle seguenti funzioni, nei punti assegnati.
   a. $f(x)=x^2-3x$, $x=0$, $x=3/2$, $x=3$
   b. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$, $x=-1$, $x=0$, $x=4$
   c. $f(x)=e^{x^2}(x^3-2x+1)$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$

5) Studiare la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni:
   a. $f(x)=\ln(1+|x|)$
   b. $f(x)=|\ln(1+x)|$
   c. $f(x)=\dfrac{x^2+|x^2-1|}{|x|}$
   d. $f(x)=e^{-|x|}$
   e. $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}$
   f. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{se } x>0\\ e^{-x} & \text{se } x\le 0\end{cases}$
   g. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{1-x^2} & \text{se } x>1\\ 2x-2 & \text{se } x\le 1\end{cases}$
   h. $f(x)=\sqrt{|x^2-3x+2|}$
   i. $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\ge 1\\ e^{x-1}+1 & x<1\end{cases}$
   j. $f(x)=x-\sqrt{x+1}$

k. $f(x)=e^{\frac{|x|}{x+2}}$

l. $f(x)=|x|\cdot\ln|x-1|$

m. $f(x)=\ln\frac{|x^2-3x+2|}{x^2+2}$

n. $f(x)=\frac{|x|e^x-1}{e^x}$

6) Analizzare gli eventuali punti di non derivabilità delle seguenti funzioni distinguendo se si tratta di punti angolosi, cuspidi o punti di flesso a tangente verticale:

a. $f(x)=|2x-x^2|$

b. $f(x)=\begin{cases}2x-3 & x>0\\ -3-x^2 & x\le 0\end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases}\ln x & x>1\\ e^{x-1}-1 & x\le 1\end{cases}$

d. $f(x)=\sqrt{x^2+x^4}$

e. $f(x)=\sqrt{|1-x|}$