Esercizi 15 – Matrici, determinanti, inversa

1. Esegui la combinazione lineare $aA+bB$ nei seguenti casi:

Soluzione

a. $A=\begin{bmatrix}4 & -3 & 6\\ 7 & 1 & 3\sqrt{2}\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}0 & 5 & -7\\ 1 & -1 & 0\\ e & -2 & 3\end{bmatrix}; a=1; b=1$

$$A+B=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 8 & 0 & 3\sqrt{2}\\ 2+e & -1 & 3\end{bmatrix}$$

b. $A=B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}, a=-1; b=2$

$$-A+2B=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}=A$$

c. $A=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}, a=2; b=\frac{1}{2}$

$$2A+\frac{1}{2}B=2\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -\frac{3}{2}\\ \frac{9}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}12\\ -3\\ 9\end{bmatrix}$$

d. $A=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}, a, b$ qualsiasi

$$aA+bB=a\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+4b\\ -a+b\\ 3a-3b\end{bmatrix}$$

2. Dopo aver stabilito se A e B sono conformabili, esegui, se possibile, il prodotto AB e il suo determinante:

Soluzione

a. A e B sono conformabili e $AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 5\\ 14 & 2\end{bmatrix}$, $\det(AB)=-50$

b. A e B sono conformabili e $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 28 & 17 & 31 \\ 29 & 18 & 27 \end{bmatrix}$, poiché A e B sono matrici quadrate si può usare il teorema di Binet: $\det(A) = 9, \det(B) = -66, \det(AB) = -594$.

c. A e B non sono conformabili; infatti $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ha dimensione 2×3 e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ha dimensione 2×4, il numero di colonne di A è diverso dal numero di righe di B.

d. A e B sono conformabili e $AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 27 & 38 \end{bmatrix}$ non è una matrice quadrata quindi non esiste il determinante.

3. Calcolare il determinante delle seguenti matrici quadrate, stabilire se sono singolari e, qualora non lo siano, calcolarne la matrice inversa.

Soluzione

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ è singolare ossia non invertibile; infatti $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (le righe e le colonne sono proporzionali)

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ è invertibile; infatti $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ è invertibile; infatti $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (le righe e le colonne sono linearmente indipendenti); $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -11 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ è invertibile; infatti $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$ (le righe e le colonne sono linearmente indipendenti); $A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 & -6 \\ -4 & -32 & -2 & 14 \\ -12 & 9 & 9 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}$