Esercizi 16 – Spazi vettoriali e rango

1. Stabilisci il rango delle seguenti matrici

Soluzione:

a. $rg(A) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\right) = 1$; infatti, poiché A non è la matrice nulla $rg(A) \geq 1$ e det$A$=0

b. $rg(B) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1$; infatti, poiché B non è la matrice nulla $rg(B) \geq 1$ e

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

c. $rg(C) = rg\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2$; infatti, poiché C non è la matrice nulla $rg(C) \geq 1$ e $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

d. $rg(D) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3$; infatti det($D$)=-25≠0.

2. Stabilire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Soluzione

a. I vettori $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti poiché rg(A)= 1; infatti $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ non è la matrice nulla quindi il rango è almeno 1 ma non può essere 2 poiché l'unico minore di ordine 2 è det$A$=0.

b. I vettori $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti; infatti sono tre vettori di R^2 e il numero massimo di vettori di R^2 linearmente indipendenti è 2. Si osserva che $rg\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}\right) = 2$ quindi i vettori linearmente indipendenti sono 2; in particolare sono linearmente indipendenti le coppie di vettori a e b $\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 11 \neq 0\right)$, a e c $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0\right)$, c e b $\left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -14 \neq 0\right)$.

c. I vettori $a = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti; infatti dalla matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ è possibile estrarre un minore non nullo di ordine 3 che, essendo A una matrice quadrata, coincide con det$A$=11≠0.

3. Dati i seguenti insiemi di vettori, stabilire la dimensione del sottospazio lineare generato e dire se sono basi di tale sottospazio.

Soluzione

a. $a = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ costituiscono una base di R^2; infatti $rg\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right) = 2$ quindi sono due vettori linearmente indipendenti di R^2 che è spazio vettoriale di dimensione 2.

b. $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ non costituiscono una base; infatti, essendo b=2a, i vettori a e b sono linearmente dipendenti.

Si osserva che, poiché $rg\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$ quindi i vettori a e c sono linearmente indipendenti, i tre vettori generano K, sottospazio di R^3 di dimensione 2, una cui base è costituita dai vettori a e c:

$$K = \left\{ h\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, h, k \in R \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2h + k \\ 3h \\ -h + 2k \end{bmatrix}, h, k \in R \right\} \subset R^3$$

La stessa cosa si può dire considerando i vettori b e c; infatti $rg\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$.

4. Scrivere il vettore $y \in R^3$ come prodotto Ax e determinare la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A.

Soluzione

a. $y = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$

quindi $y = Ax$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$ quindi le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti e $r(A) \geq 2$.

Se si osserva che la terza riga è combinazione lineare della altre due (la prima meno la seconda), la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A è pari a $r(A)$=2.
Lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere osservando che $r(A)$= $r(B)$ dove

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ con le ultime due righe uguali.

b. $y = \begin{bmatrix} a \\ -3a \\ 2a \end{bmatrix}$

quindi $y = Ax$ con $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x = a$ e il rango di A è uguale a 1 quindi la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A è pari a $r(A)$=1.

c. $y=\begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ x_2 \\ -x_1-2x_2 \end{bmatrix}$

quindi $y=Ax$ con $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=1$ quindi le due colonne di *A* sono linearmente indipendenti e *r*(*A*)=2.

d. $y=\begin{bmatrix} x_1-x_2+x_3+x_4 \\ x_1+2x_3-x_4 \\ x_1+x_2+3x_3-3x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

quindi $y=Ax$ con $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=1$ quindi le prime due colonne di *A* sono linearmente indipendenti e *r*(*A*)≥2; inoltre *r*(*A*)≤min(3,4)=3 e le quattro colonne della matrice *A* sono sicuramente linearmente dipendenti.

Poiché $\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}=0$ e $\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}=0$ allora la dimensione dello spazio generato dalle colonne di *A* è pari a *r*(*A*)=2.