**Esercizi 12 – Sistemi lineari**

1. Determinare, tramite il teorema di Rouchè Capelli, se i seguenti sistemi hanno soluzione e, qualora siano compatibili, trovare l’insieme delle soluzioni e dire se è uno spazio lineare.
   1. , poiché det(*A*)=5≠0, allora rg(*A*)=2.  
       ossia   
      La matrice completa  ha rango ≤2 quindi, poiché il rango di *A* è 2, i due ranghi sono uguali a 2, numero delle variabili, quindi il sistema è determinato.  
        
      L’insieme delle soluzioni è  e non è uno spazio lineare; infatti con contiene il vettore nullo (condizione necessaria).
   2. , poiché  e allora rg(*A*)=2.  
       ossia   
      Il sistema è omogeneo quindi la matrice completa  ha lo stesso rango di *A* ed è compatibile, poiché tale rango è 2, minore del numero delle variabili, il sistema è indeterminato.  
      Per risolvere il sistema la matrice  può essere trasformata con operazioni elementari sulle righe

* scambiando la 1° riga con la seconda: 
* sommando la terza con la prima molt. per 2: 

Si osserva che la seconda e la terza riga sono uguali quindi il sistema diventa  
 e l’insieme delle soluzioni è  ed è uno spazio lineare di dimensione 1 perché gererato da un unico vettore.

* 1. , poiché , allora rg(*A*)=2  
      ossia   
     La matrice completa è  ha rango 3 diverso da rg(*A*)=2 quindi il sistema è incompatibile.
  2. , poiché , allora rg(*A*)=3 ossia 

La matrice completa è  ha stesso ≤3, poiché si è dimostrato che il rango di *A* è 3, pari al numero di incognite, il sistema è determinato.  
Per risolvere il sistema la matrice  può essere trasformata con operazioni elementari sulle righe .  
Quindi il sistema diventa  
 e l’insieme delle soluzioni è  , non è uno spazio lineare; infatti non contiene il vettore nullo (condizione necessaria).