Esercizi 12 – Sistemi lineari

1. Determinare, tramite il teorema di Rouchè Capelli, se i seguenti sistemi hanno soluzione e, qualora siano compatibili, trovare l'insieme delle soluzioni e dire se è uno spazio lineare.

   a. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, poiché det($A$)=5≠0, allora rg($A$)=2.

   $A\underline{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ossia $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$

   La matrice completa $[A\,|\,b]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango ≤2 quindi, poiché il rango di A è 2, i due ranghi sono uguali a 2, numero delle variabili, quindi il sistema è determinato.

   $[A\,|\,b]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_2 = -1 \end{cases}$

   L'insieme delle soluzioni è $S=\left\{\begin{bmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}\right\}$ e non è uno spazio lineare; infatti con contiene il vettore nullo (condizione necessaria).

   b. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, poiché $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ e $\det A = -1\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ allora rg(A)=2.

   $A\underline{x}=\underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ossia $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

   Il sistema è omogeneo quindi la matrice completa $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ha lo stesso rango di A ed è compatibile, poiché tale rango è 2, minore del numero delle variabili, il sistema è indeterminato.

   Per risolvere il sistema la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ può essere trasformata con operazioni elementari sulle righe

   - scambiando la 1° riga con la seconda: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

   - sommando la terza con la prima molt. per 2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si osserva che la seconda e la terza riga sono uguali quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = -2x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$ e l'insieme delle soluzioni è $S = \left\{ k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, k \in R \right\}$ ed è uno spazio lineare di dimensione 1 perché gererato da un unico vettore.

c. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, poiché $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, allora rg($A$)=2

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ossia } \begin{cases} 5x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

La matrice completa è $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 3 diverso da rg(A)=2 quindi il sistema è incompatibile.

d. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, poiché $\det A = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, allora rg($A$)=3

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ ossia } \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

La matrice completa è $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ha stesso ≤3, poiché si è dimostrato che il rango di A è 3, pari al numero di incognite, il sistema è determinato.

Per risolvere il sistema la matrice $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ può essere trasformata con operazioni elementari sulle righe $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -12 & 17 \end{bmatrix}$.

Quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 10x_2 + 8x_3 = 7 \\ -12x_3 = 17 \end{cases}$$ e l'insieme delle soluzioni è $S = \left\{ \begin{bmatrix} 7/4 \\ 11/6 \\ -17/12 \end{bmatrix} \right\}$, non è uno spazio lineare; infatti non contiene il vettore nullo (condizione necessaria).