Esercizi su Funzioni a più variabili (1)

1. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

a. $f(\underline{x}) = \ln\left(x_2^{\,2} - 4\right), \underline{x} \in R^2$

b. $f(\underline{x}) = \dfrac{\sqrt{x_2 - x_1^{\,2} + 1}}{\sqrt{2 - x_2}} + \ln\left(4\left(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}\right) - 1\right), \underline{x} \in R^2$

c. $f(\underline{x}) = \sqrt{x_1\left(x_2 + x_1\right)}, \underline{x} \in R^2$

2. Determinare le curve di livello delle seguenti funzioni disegnandole nel piano $\left(x_1, x_2\right)$
   a. $f(\underline{x}) = \ln\left(x_2^{\,2} - 4\right), \underline{x} \in R^2$
   b. $f(\underline{x}) = x_1^{\,2} - x_2^{\,2} - 4, \underline{x} \in R^2$
   c. $f(\underline{x}) = x_1^{\,2} + 2x_1 + x_2^{\,2}, \underline{x} \in R^2$
   d. $f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2^{\,2}, \underline{x} \in R^2$

3. Per le funzioni dell'es.3 determinare nel piano $\left(x_1, y\right)$ le curve ottenute ponendo $x_2 = k$ e nel piano $\left(x_2, y\right)$ le curve ottenute ponendo $x_1 = k$.

4. Individuare fra le seguenti funzioni quelle omogenee e, quando possibile, scriverle nella forma matriciale Ax (lineari) o $x^T Ax$ (quadratiche).
   a. $f\left(\underline{x}\right) = 2x_1 + 3x_2 - x_3, \underline{x} \in R^3$
   b. $f\left(\underline{x}\right) = 2x_1 + 3x_2 + 2, \underline{x} \in R^3$
   c. $f\left(\underline{x}\right) = 2x_1 + 3x_2 - x_3^2, \underline{x} \in R^3$
   d. $f\left(\underline{x}\right) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2, \underline{x} \in R^3$
   e. $f\left(\underline{x}\right) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \underline{x} \in R^4$
   f. $f\left(\underline{x}\right) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4, \underline{x} \in R^4$

5. Classificare le seguenti forme quadratiche determinando se sono definite o semidefinite o indefinite e dire se l'origine è punto di minimo o di massimo o di sella.
   a. $q\left(\underline{x}\right) = \underline{x}^T A\underline{x},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}$
   b. $q\left(\underline{x}\right) = \underline{x}^T A\underline{x},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
   c. $q\left(\underline{x}\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2, \underline{x} \in R^3$
   d. $q\left(\underline{x}\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2, \underline{x} \in R^3$
   e. $q\left(\underline{x}\right) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 - x^3, \underline{x} \in R^3$

6. Per le seguenti funzioni, quando possibile, calcolare nel punto $\underline{x}^0$ il gradiente e l'equazione dell'iperpiano tangente.

   a. $f : R^3 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_3^2$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

   b. $f : R^2 \to R$ tale che $f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2} + x_1^{\ 2}$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   c. $f : R^3 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 - 2x_2x_3$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. Dopo avere verificato se sono differenziabili, determinare i punti stazionari o critici delle seguenti funzioni e dire se sono punti di massimo o di minimo globale (assoluto). Suggerimento: confrontare i valori della funzione nei punti stazionari con quelli negli altri punti oppure studiarne concavità o convessità tramite il segno dell'hessiano.

   a. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = -3x_1^4 - x_2^2$
   b. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^4x_2^2$
   c. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = -x_1^2x_2$
   d. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$, $\underline{x} \neq \underline{0}$

8. Determinare i punti di massimo locale, di minimo locale o di sella delle seguenti funzioni utilizzando, se possibile, le condizioni sufficienti del secondo ordine (gradiente nullo e segno dell'hessiano).

   a. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^3x_2$
   b. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = (x_1^{\ 2} - 1)(x_2 + 1)$
   c. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_2^2(1 - x_1^2 - 2x_1)$