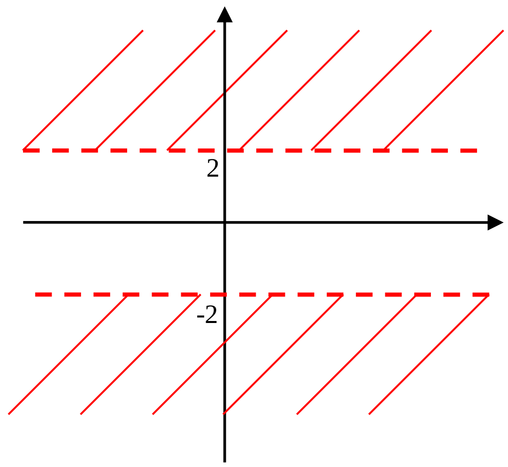
Esercizi Funzioni a più variabili (1)

1. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

a.

$f(\underline{x}) = \ln\left(x_2^{\,2} - 4\right),\ \underline{x} \in R^2$

$x_2^{\,2} - 4 > 0 \Leftrightarrow (x_2 - 2)(x_2 + 2) > 0$

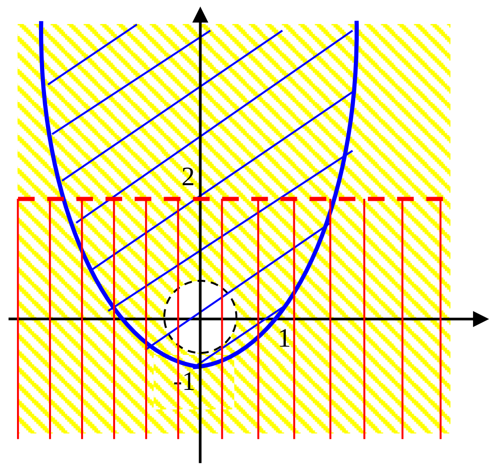


b.

$$f(\underline{x}) = \frac{\sqrt{x_2 - x_1^{\,2} + 1}}{\sqrt{2 - x_2}} + \ln\left(4\left(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}\right) - 1\right),\ \underline{x} \in R^2$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1^{\,2} + 1 \geq 0 \\ 2 - x_2 > 0 \\ 4\left(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}\right) - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \geq x_1^{\,2} - 1 \\ x_2 < 2 \\ x_1^{\,2} + x_2^{\,2} > \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il campo di esistenza è dato dall'intersezione delle regioni che soddisfano le tre disequazioni, rappresentate rispettivamente in blu, rosso e giallo.



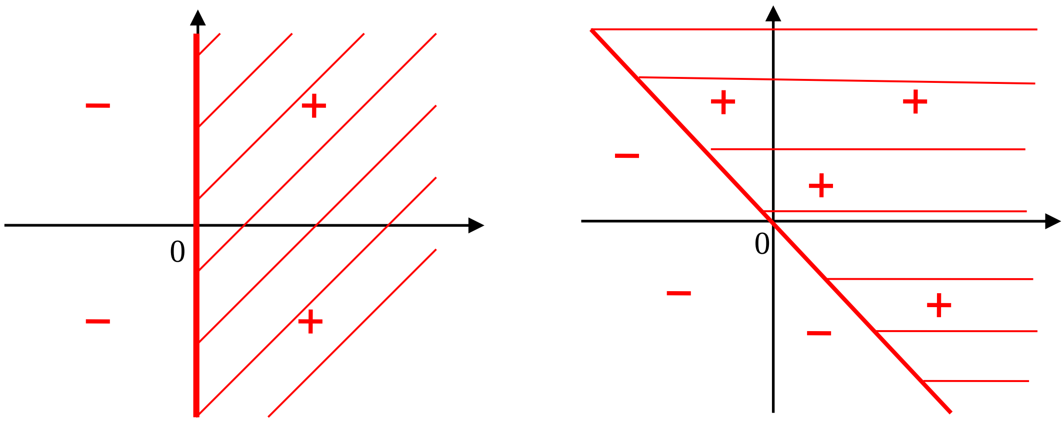
c.

$f(\underline{x}) = \sqrt{x_1(x_2 + x_1)},\ \underline{x} \in R^2$

$x_1(x_2 + x_1) \geq 0$

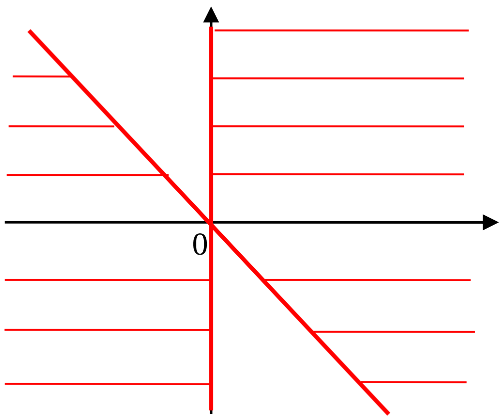
Nel grafico si riportano i segni dei due fattori:

$x_1 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x_2 \geq -x_1$



Il grafico del campo di esistenza è:

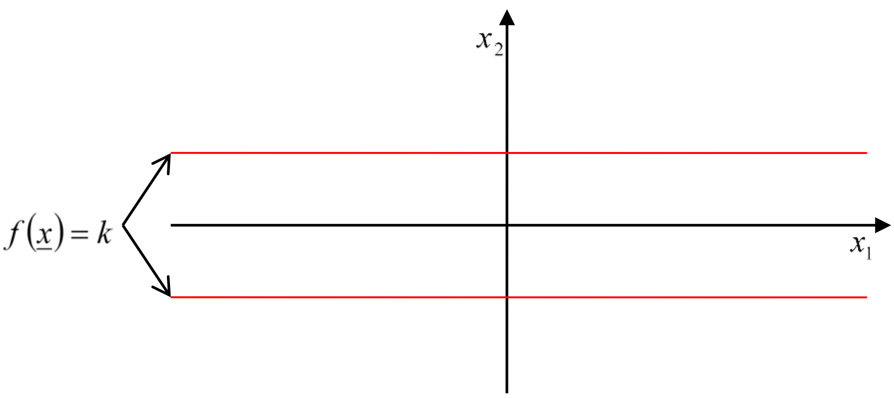
$$x_1\left(x_2 + x_1\right) \geq 0$$



2. Determinare le curve di livello delle seguenti funzioni disegnandole nel piano $\left(x_1, x_2\right)$
   a. $f(\underline{x}) = \ln\left(x_2{}^2 - 4\right)$, $\underline{x} \in R^2$

      $\ln\left(x_2{}^2 - 4\right) = k,\ k \in R$

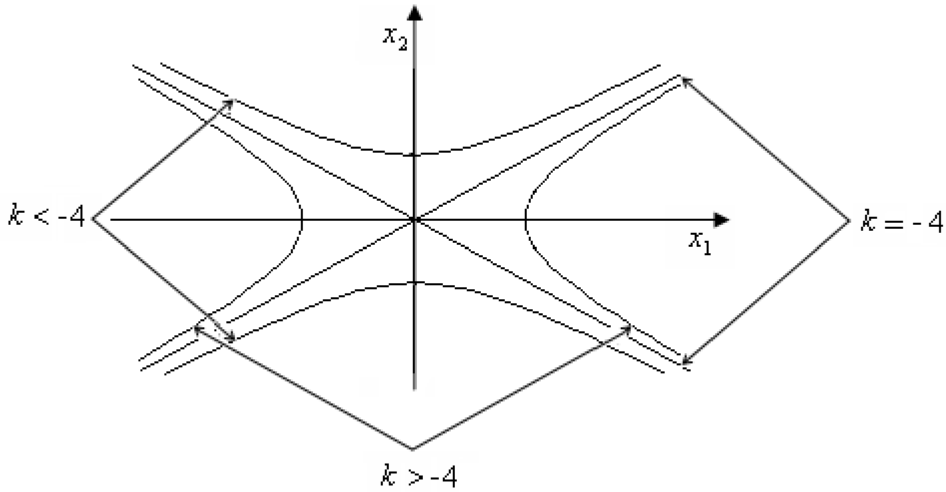
      $x_2{}^2 - 4 = e^k \Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{e^k + 4},\ k \in R$



b. $f(\underline{x}) = x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - 4,\ \underline{x} \in R^2$

$x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - 4 = k,\ k \in R$

$x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} = 4 + k$



c. $f(\underline{x}) = x_1^{\ 2} + 2x_1 + x_2^{\ 2},\ \underline{x} \in R^2$

$x_1^{\ 2} + 2x_1 + x_2^{\ 2} = k,\ k \in R$

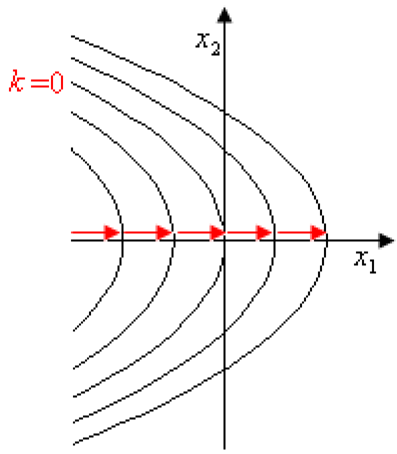
$(x_1 + 1)^2 + x_2^{\ 2} = k + 1$

si tratta di circonferenze di centro (-1,0) e raggio $\sqrt{k+1}$ per $k \geq -1$

d. $f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2^{\ 2},\ \underline{x} \in R^2$

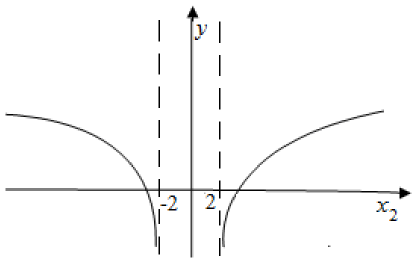
$2x_1 + x_2^{\ 2} = k,\ k \in R$

$x_1 = \frac{1}{2}\left(k - x_2^{\ 2}\right)$

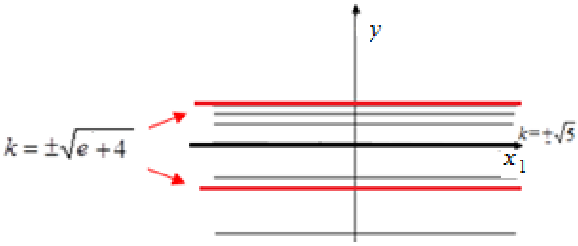


3. Per le funzioni dell'es.4 determinare nel piano (x_1, y) le curve ottenute ponendo $x_2 = k$ e nel piano (x_2, y) le curve ottenute ponendo $x_1 = k$.

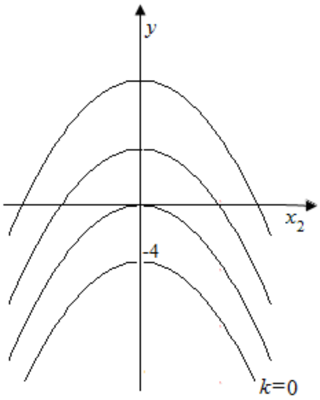
a. Ponendo $x_1=k$ in $f(\underline{x}) = \ln(x_2^2 - 4),\ \underline{x} \in R^2$
si ottiene $y = \ln(x_2^2 - 4),\ x < -2 \vee x > 2$
il cui grafico si rappresenta nel **piano (x_2,y)**



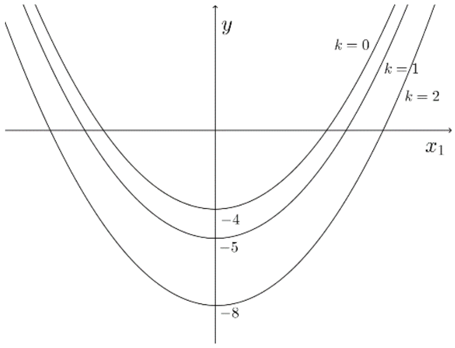
Ponendo $x_2=k$ in $f(\underline{x}) = \ln(x_2^2 - 4),\ \underline{x} \in R^2$
si ottiene
$y = \ln(k^2 - 4) = c \in R,\ k < -2 \vee k > 2$
il cui grafico si rappresenta nel **piano (x_1,y)**
Per esempio per
$k = \pm\sqrt{5}$ si ha y=0
$k = \pm\sqrt{e+4}$ si ha y=1



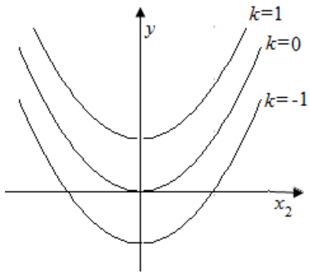
b. Ponendo $x_1=k$ in $f(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^2 - 4,\ \underline{x} \in R^2$
si ottiene $y = -x_2^2 - 4 + k^2,\ \underline{x} \in R$
il cui grafico si rappresenta nel **piano (x_2,y)**



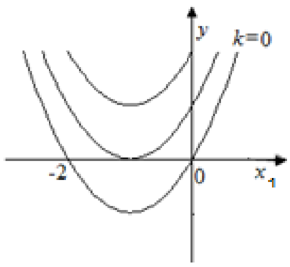
Ponendo $x_2=k$ in $f(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^2 - 4,\ \underline{x} \in R^2$
si ottiene $y = x_1^2 - 4 - k^2,\ \underline{x} \in R$
il cui grafico si rappresenta nel **piano (x_1,y)**



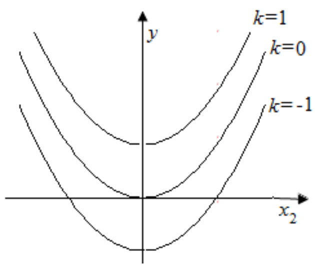
c. Ponendo $\boldsymbol{x_1=k}$ in $f(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2$, $\underline{x} \in R^2$
si ottiene $y = x_2^2 + k^2 + 2k$, $\underline{x} \in R$
il cui grafico si rappresenta nel **piano ($\boldsymbol{x_2,y}$)**



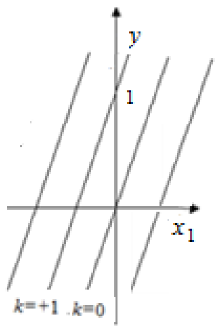
Ponendo $\boldsymbol{x_2=k}$ in $f(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2$, $\underline{x} \in R^2$
si ottiene $y = x_1^2 + 2x_1 + k^2$, $\underline{x} \in R$
il cui grafico si rappresenta nel **piano ($\boldsymbol{x_1,y}$)**



d. Ponendo $\boldsymbol{x_1=k}$ in $f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2^2$, $\underline{x} \in R^2$,
si ottiene $y = x_2^2 + 2k$, $\underline{x} \in R$
il cui grafico si rappresenta nel **piano ($\boldsymbol{x_2,y}$)**



Ponendo $\boldsymbol{x_2=k}$ in $f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2^2$, $\underline{x} \in R^2$,
si ottiene $y = 2x_1 + k^2$, $\underline{x} \in R$
il cui grafico si rappresenta nel **piano ($\boldsymbol{x_1,y}$)**



4. Individuare fra le seguenti funzioni quelle omogenee e, quando possibile, scriverle nella forma matriciale Ax (lineari) o $x^T Ax$ (quadratiche).

   a. $f(\underline{x}) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$, $\underline{x} \in R^3$

   f è omogenea di primo grado, $f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

   b. $f(\underline{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 2$, $\underline{x} \in R^3$

   f non è omogenea; infatti $f(\alpha \underline{x}) = 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 + 2 = \alpha(2x_1 + 3x_2) + 2$ mentre $\alpha f(\underline{x}) = \alpha(2x_1 + 3x_2 + 2)$ e in generale $2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 + 2 \neq 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 + 2\alpha$.

   c. $f(\underline{x}) = 2x_1 + 3x_2 - x_3^2$, $\underline{x} \in R^3$

   f non è omogenea; infatti $f(\alpha \underline{x}) = 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 - \alpha^2 x_3^2$ mentre $\alpha f(\underline{x}) = \alpha(2x_1 + 3x_2 - x_3^2) = 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 - \alpha x_3^2$ e in generale $2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 - \alpha^2 x_3^2 \neq 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 - \alpha x_3^2$. Analogamente si verifica $f(\alpha \underline{x}) \neq \alpha^2 f(\underline{x})$.

   d. $f(\underline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2$, $\underline{x} \in R^3$

   f è omogenea di secondo grado (forma quadratica), $f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

   e. $f(\underline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $\underline{x} \in R^4$

   f è omogenea di primo grado, $f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

   f. $f(\underline{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4$, $\underline{x} \in R^4$

   f è omogenea di secondo grado (forma quadratica),

   $$f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

5. Classificare le seguenti forme quadratiche determinando se sono definite o semidefinite o indefinite.

   a. $q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

   La matrice A è reale e simmetrica, si osserva che tutti i minori principali di N-O sono positivi: $a_{11}=1>0, \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2>0, |A|=11>0$ quindi la forma quadratica è definita positiva e il punto (0,0,0) è di minimo assoluto forte cioè unico.

b. $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x},\ A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

La matrice A è reale ma non è simmetrica, quindi bisogna considerare una matrice B simmetrica che genera la stessa forma quadratica: $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$; infatti

$$q(\underline{x})=\underline{x}^T\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\underline{x}=\underline{x}^T\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\underline{x}=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-x_3^2$$

Se si considerano i primi due minori principali di N-O della matrice B:
$b_{11}=1>0, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0$ si osserva che risultano a segno alterno partendo dal positivo quindi la forma quadratica è indefinita e il punto (0,0,0) è di sella.

c. $q(\underline{x})=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-2x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2,\ \underline{x}\in R^3$

$$q(\underline{x})=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

La matrice A è reale e simmetrica, se si considerano i tre minori principali di N-O della matrice: $a_{11}=1>0. \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0, |A|=-4<0$ si osserva che risultano i primi due positivi e il terzo negativo quindi la forma quadratica è indefinita e il punto (0,0,0) è di sella.

d. $q(\underline{x})=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-2x_1x_3-2x_2x_3+x_3^2,\ \underline{x}\in R^3$

$$q(\underline{x})=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

La matrice A è reale e simmetrica, si considerano i minori principali di N-O:
$a_{11}=1>0. \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0, |A|=0$ si osserva che risultano i primi due positivi e il terzo nullo quindi la forma quadratica è semidefinita positiva quindi q è convessa e il punto (0,0,0) è di minimo assoluto o globale.

e. $q(\underline{x})=-x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2-2x_2x_3-x_3{}^2,\ \underline{x}\in R^3$

$$q(\underline{x}) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

La matrice A è reale e simmetrica e poiché $|A| = 0$, si devono considerare tutti i minori principali:

$a_{11} = -1 < 0, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ quindi la forma quadratica è semidefinita negativa quindi q è concava e il punto (0,0,0) è di massimo assoluto debole cioè non unico.

6. Per le seguenti funzioni, quando possibile, calcolare nel punto $\underline{x}^0$ il gradiente e l'equazione dell'iperpiano tangente.

a. $f : R^3 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_3^2$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

<u>Soluzione</u>

Il dominio è R^3

$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_2,\ f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1,\ f_3' = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3$ quindi il gradiente è $\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$

$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ f(\underline{x}^0) = 2,\ \nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$

Equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$y = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 + 2(x_1 - 1) + 3x_2 - 2(x_3 + 1) \Longrightarrow y = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2$$

b. $f : R^2 \to R$ tale che $f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2} + x_1^2$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>Soluzione</u>

Il dominio è R^2

$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2e^{x_1x_2} + 2x_1,\ f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1e^{x_1x_2}$ quindi il gradiente è $\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2e^{x_1x_2} + 2x_1 \\ x_1e^{x_1x_2} \end{bmatrix}$,

$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ f(\underline{x}^0) = 2\ \nabla f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 + 2(x_1 - 1) + x_2 \to y = 2x_1 + x_2$$

c. $f : R^3 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 - 2x_2x_3$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Soluzione

Il dominio è R^3

$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1$, $f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_3$, $f_3' = \frac{\partial f}{\partial x_3} = -2x_2$ quindi il gradiente è $\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_3 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$

$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f(\underline{x}^0) = 2$, $\nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$y = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \rangle = 2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \\ x_3 - 1 \end{bmatrix} = 2 - 2(x_2 + 1) + 2(x_3 - 1)$$

$$y = -2x_2 + 2x_3 - 2$$

7. Dopo avere verificato se sono differenziabili, determinare i punti stazionari o critici delle seguenti funzioni e dire se sono punti di massimo o di minimo globale (assoluto).

a. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = -3x_1^4 - x_2^2$ è un polinomio quindi ***f* è differenziabile due volte** e

$$\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = -12x_1^3, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = -2x_2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} -12x_1^3 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

$f(\underline{0}) = 0$ **e** $f(\underline{x}) = -3x_1^4 - x_2^2 \le 0$ quindi l'origine è un punto di massimo assoluto forte (è l'unico).

Si sarebbe potuto anche osservare che la funzione è concava; infatti $H_f = \begin{bmatrix} -36x_1^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ è semidefinita negativa per ogni $\underline{x}$, essendo $-36x_1^2 \le 0, |H_f| = 72x_1^2 \ge 0$.

b. $f: R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^4 x_2^2$ è un polinomio quindi ***f* è differenziabile due volte** e

$\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = 4x_1^3 x_2^2, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = 2x_1^4 x_2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1^3 x_2^2 \\ 2x_1^4 x_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0$ quindi i punti stazionari sono $(0,x_2)$ e $(x_1,0)$ ossia tutti i punti degli assi.

$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$ e poiché $f(\underline{x}) = x_1^4 x_2^2 \geq 0$ tali punti sono di minimo assoluto debole.

Si osserva che $H_f = \begin{bmatrix} 12x_1^2 x_2^2 & 8x_1^3 x_2 \\ 8x_1^3 x_2 & 2x_1^4 \end{bmatrix}$ è semidefinita positiva nei punti $0,x_2)$ e $(x_1,0)$, quindi no dà indicazioni sulla natura dei punti.stazionari di f.

c. $f: R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = -x_1^2 x_2$ è un polinomio quindi ***f* è differenziabile due volte** e

$\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = -2x_1 x_2, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = -x_1^2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} -2x_1 x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow x_1 = 0$ quindi tutti i punti dell'asse x_2 sono punti critici e hanno la forma $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_1 \in R$. In tali punti $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 0$.

$f(\underline{x}) = -x_1^2 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 0$ e $f(\underline{x}) = -x_1^2 x_2 \leq 0 \Leftrightarrow x_2 \geq 0$ quindi i punti stazionari sono di sella.

In questo caso il segno dell'hessiano $H_f = \begin{bmatrix} -2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 0 \end{bmatrix}$ è nullo in (0,0) ma per $x_1 \neq 0$

$\det(H_f) = -4x_1^2 < 0$ cioè indefinito quindi la funzione non è né concava né convessa.

d. $f: R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = \ln(x_1^2 + x_2^2), \underline{x} \neq \underline{0}$.

$\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ sono continue per $\underline{x} \neq \underline{0}$ quindi ***f* è differenziabile** per $\underline{x} \neq \underline{0}$**.**

$\nabla f = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$ è impossibile per $\underline{x} \neq \underline{0}$ quindi f non ha né punti di massimo né di minimo.

8. Determinare i punti di massimo locale, di minimo locale o di sella delle seguenti funzioni utilizzando, se possibile, le condizioni sufficienti del secondo ordine (gradiente nullo e segno dell'hessiano).
   Osservazione: le funzioni sono polinomi quindi **differenziabili almeno due volte** e sono applicabili le condizioni del secondo ordine.

   a. $f: R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1 x_2^3$

   $\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = x_2^3, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = 3x_1 x_2^2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} x_2^3 \\ 3x_1 x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$ quindi tutti i punti dell'asse x_1 :sono punti critici e hanno la forma $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in R$.

   L'hessiano $H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 3x_2^2 \\ 3x_2^2 & 6x_1 x_2 \end{bmatrix}$ è indefinito; infatti $\det(H_f(\underline{x})) = -9x_2^4 \leq 0$ quindi i punti stazionari sono di sella.

   Nei punti critici $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$ e $f(\underline{x}) = x_1 x_2^3 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq 0$ e $f(\underline{x}) = x_1 x_2^3 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq 0$ questo conferma che i punti stazionari sono di sella.

b. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = (x_1^2 - 1)(x_2 + 1)$

$$\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = 2x_1(x_2+1), \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = x_1^2 - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{dx_1^2}(\underline{x}) = 2(x_2+1), \frac{\partial^2 f}{dx_1 dx_2}(\underline{x}) = 2x_1, \frac{\partial^2 f}{dx_2^2}(\underline{x}) = 0$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1(x_2+1) \\ x_1^2 - 1 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

I punti critici sono:

$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ indefinita quindi $\underline{x}^1$ è punto di sella

$\underline{x}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ indefinita quindi $\underline{x}^2$ è punto di sella

Concludendo la funzione non ha né punti di massimo né di minimo.

c. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_2^2(1 - x_1^2 - 2x_1)$

$$\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = -2x_2^2(x_1+1), \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = 2x_2(1 - x_1^2 - 2x_1), \nabla f = \begin{bmatrix} -2x_2^2(x_1+1) \\ 2x_2(1 - x_1^2 - 2x_1) \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow x_2 = 0$$

I punti critici sono tutti i punti: $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, in tali punti $f(\underline{x}) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{dx_1^2}(\underline{x}) = -2x_2^2, \frac{\partial^2 f}{dx_1 dx_2}(\underline{x}) = -4x_2(x_1+1), \frac{\partial^2 f}{dx_2^2}(\underline{x}) = 2(1 - x_1^2 - 2x_1)$$

Quindi l'hessiano è $H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -2x_2^2 & -4x_2(x_1+1) \\ -4x_2(x_1+1) & 2(1 - x_1^2 - 2x_1) \end{bmatrix}$.

Nei punti critici $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(1 - x_1^2 - 2x_1) \end{bmatrix}$ è semidefinito quindi non si può dire nulla sulla natura dei punti critici; tuttavia ci si può chiedere se esiste un intorno completo di $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ per cui vale $f(\underline{x}) < f\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ oppure $f(\underline{x}) > f\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

- $f(\underline{x}) < 0$ se e solo se $x_2^2(1 - x_1^2 - 2x_1) < 0 \Leftrightarrow x_2 \neq 0, x_1 < -1 - \sqrt{2} \vee x_1 > -1 + \sqrt{2}$ quindi per tali valori di x_1 i punti critici sono di massimo relativo. Si osserva che per tali valori l'hessiano risulta semidefinito negativo.
- $f(\underline{x}) > 0$ se e solo se $x_2^2(1 - x_1^2 - 2x_1) > 0 \Leftrightarrow x_2 \neq 0, -1 - \sqrt{2} < x_1 < -1 + \sqrt{2}$ quindi per tali valori di x_1 i punti critici sono di minimo relativo. Si osserva che per tali valori l'hessiano risulta semidefinito positivo.

- Se $1-x_1^2-2x_1=0$ ossia $x_1=-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}$ i punti critici sono di sella; infatti non esistono intorni completi dei punti $\begin{bmatrix}-1-\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1+\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$ in cui la funzione assume lo stesso segno.