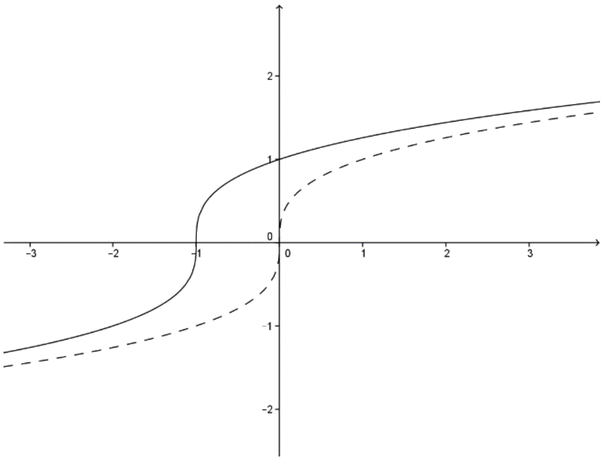
SOLUZIONI ESERCIZI 02 - FUNZIONI (GENERALITA')

1. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni determinando per ognuna di esse dominio, codominio o immagine, eventuali sup *f*, inf *f*, max *f*, min *f*, monotonia, convessità/concavità.

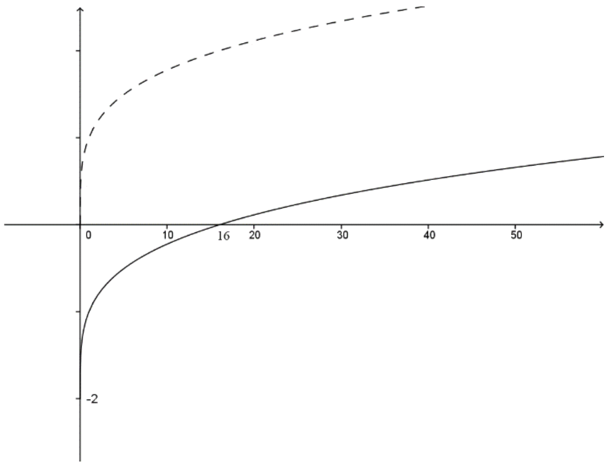
a. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$D_f = R$, $\mathrm{Im}_f = R$, $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, non ci sono max *f*, min *f*, *f* è strettamente monotona crescente, *f* è strettamente convessa per $x \leq -1$, *f* è strettamente concava per $x \geq -1$.



b. $f(x) = \sqrt[4]{x} - 2$

$D_f = R^+$, $\mathrm{Im}_f = [-2, +\infty)$, $\sup f = +\infty$, $\inf f = -2 = \min f$, non c'è max *f*, *f* è strettamente monotona crescente, *f* è strettamente concava in tutto il dominio.

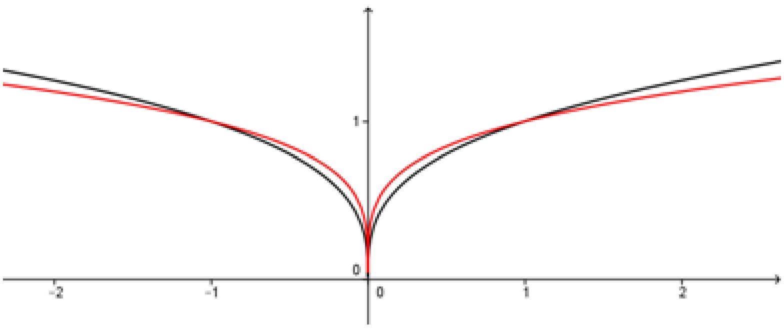


Per gli esercizi d. ed e. si possono utilizzare i grafici delle seguenti funzioni traslati rispetto a *x*.

c. $f(x) = \sqrt[3]{|x|} = \left|\sqrt[3]{x}\right|$ (grafico nero)

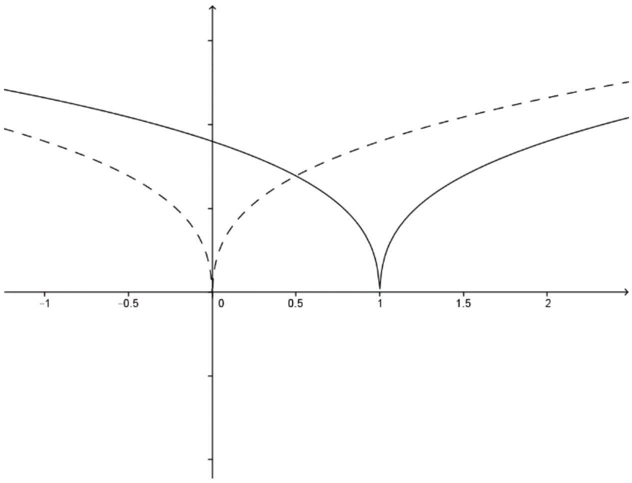
$f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ (grafico rosso)

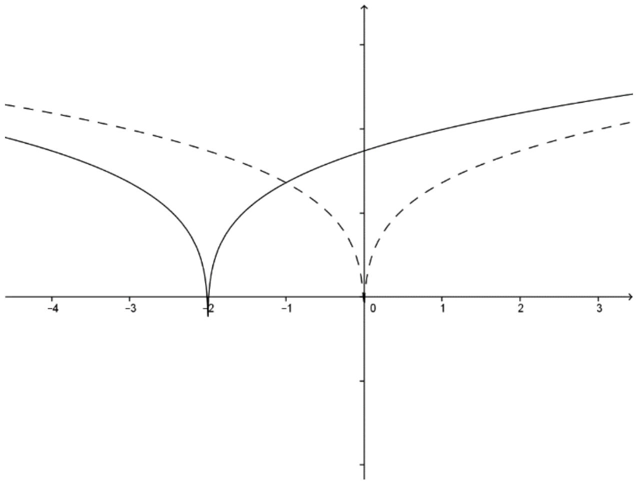
Osservazione: nella funzione in rosso non è possibile invertire la radice con il valore assoluto perché cambia il C.E.; infatti $f(x) = \left|\sqrt[4]{x}\right|$ è definita per $x \geq 0$, il suo grafico è solo il ramo a destra dell'asse *y*.



d. $f(x)=\left|\sqrt[3]{x-1}\right|=\sqrt[3]{|x-1|}$

e. $f(x)=\sqrt[4]{|x+2|}$



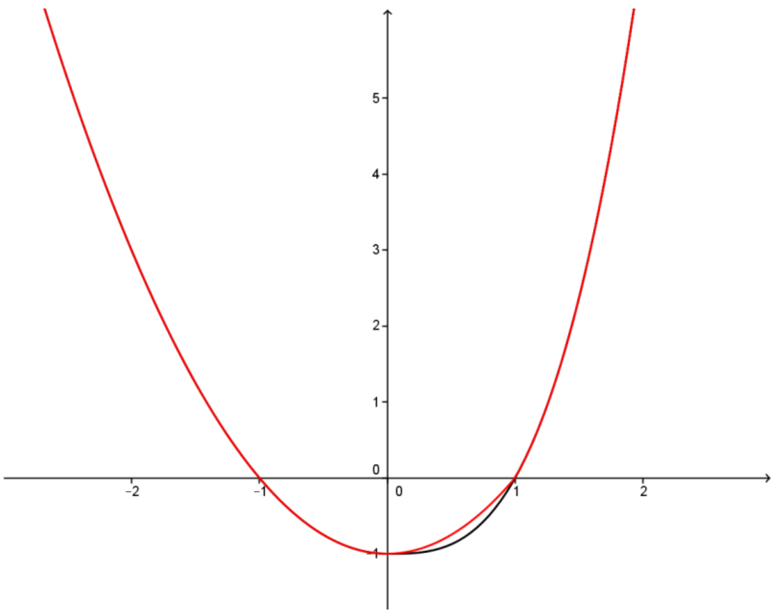


Per tutte queste funzioni: $f(x)=\sqrt[3]{|x|}=\left|\sqrt[3]{x}\right|$, $f(x)=\sqrt[4]{|x|}$, $f(x)=\left|\sqrt[3]{x-1}\right|$, $f(x)=\sqrt[4]{|x+2|}$ si ha $D_f=R$, $\mathrm{Im}_f=R^+$, $\sup f=+\infty$, $\inf f=0=\min f$, non c'è max *f*, non sono monotone, non sono né concave né convesse nel loro dominio.

f. $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\geq 0 \\ x^2-1 & x<0 \end{cases}$ (grafico nero)

$f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\geq 1 \\ x^2-1 & x<1 \end{cases}$ (grafico rosso)

$D_f=R$, $\mathrm{Im}_f=[-1,+\infty)$, $\sup f=+\infty$,
$\inf f=1=\min f$, non c'è max *f*,
non è monotona, *f* è strettamente convessa.

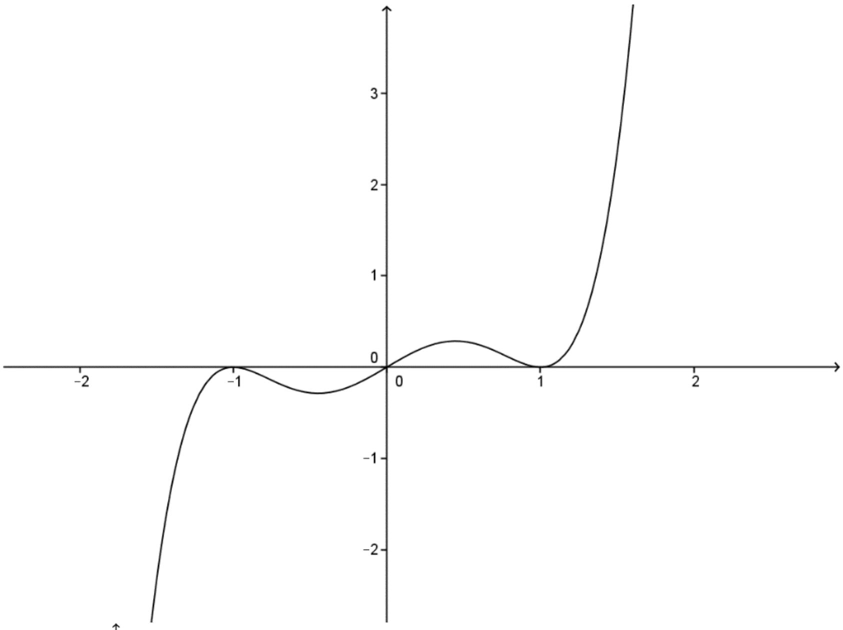


g. $f(x) = x(x^2 - 1)^2$

$D_f = R$, $\mathrm{Im}_f = (-\infty, +\infty)$, f è dispari; infatti

$f(-x) = -x(x^2 - 1)^2 = -f(x)$.

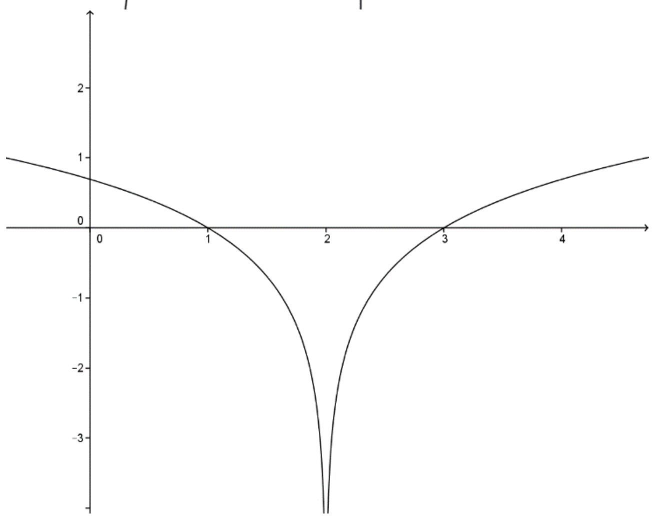
$\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, non c'è min f e max f, f non è monotona, f non è né concava né convessa. C'è un minimo locale per $x \in (-1, 0)$ e un massimo locale per $x \in (0, 1)$.



h. $f(x) = \log_3 |x - 2|$

$D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$,

$\mathrm{Im}_f = (-\infty, +\infty)$. $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, non c'è min f e max f, f non è monotona, f è strettamente concava per $x < 2$ o per $x > 2$.



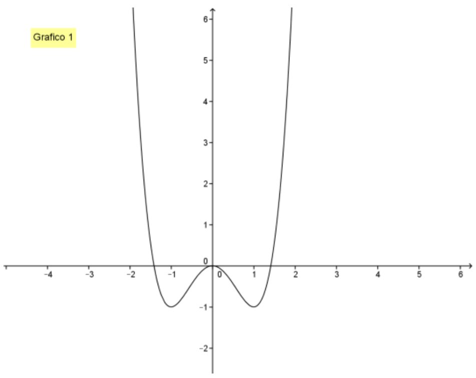
2. Associa le seguenti funzioni al rispettivo grafico spiegando il motivo della scelta.

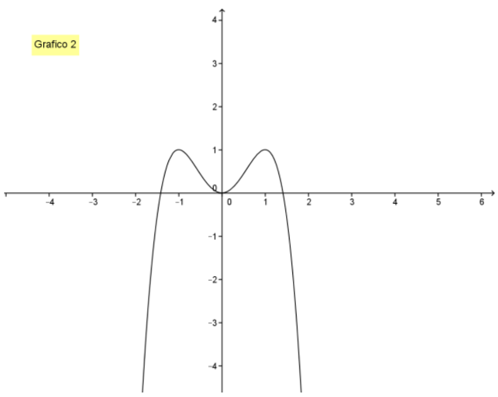
a. $f(x) = x^4 - 2x^2$ Grafico 1

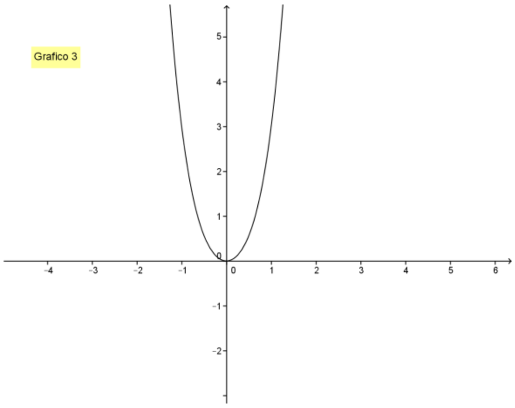
a. $f(x) = -x^4 - 2x^2$ Grafico 4

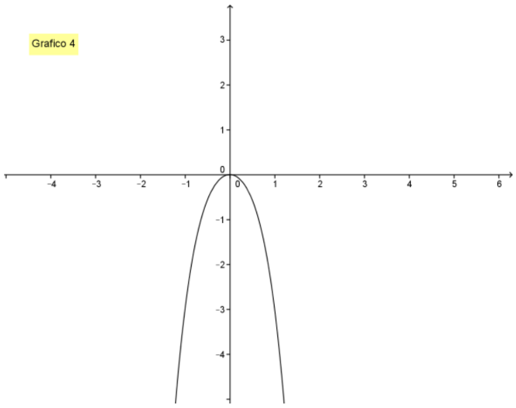
b. $f(x) = -x^4 + 2x^2$ Grafico 2

c. $f(x) = x^4 + 2x^2$ Grafico 3









3. Dire per ognuna delle seguenti funzioni composte quali sono le funzioni elementari che le compongono e determinarne il dominio.
   a. $z(x) = \sqrt[3]{x+1}$
      $f(x) = x+1$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ il dominio di $z(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{x+1}$ è $D = (-\infty, +\infty)$
   b. $z(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$
      $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $g(x) = x+1$ il dominio di $z(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{x^2} + 1$ è $D = (-\infty, +\infty)$
   c. $z(x) = 2^{\sqrt{x}}$
      $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2^x$ il dominio di $z(x) = g(f(x)) = 2^{\sqrt{x}}$ è $D = [0, +\infty)$
   d. $z(x) = \sqrt{2^x}$
      $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2^x$ il dominio di $z(x) = f(g(x)) = \sqrt{2^x}$ è $D = (-\infty, +\infty)$
   e. $z(x) = \ln(x^2 + x + 1)$
      $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = \ln x$ il dominio di $z(x) = g(f(x)) = \ln(x^2 + x + 1)$ è $D = (-\infty, +\infty)$
   f. $z(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x + 3$
      $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x^2 + x + 3$ il dominio di
      $z(x) = f(g(x)) = 2(\ln x)^2 + \ln x + 3$ è $D = (0, +\infty)$

4. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:
   a. $f(x) = \log_3(x+1) - \log_2(2x^2 - 1)$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee x > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$D_f = (-1, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, +\infty)$$

b. $f(x)=\sqrt{x+4}\,\dfrac{|x|}{\log_3(x+1)}$

$$\begin{cases} x+4>0 \\ x+1>0 \\ \log_3(x+1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<0 \vee x>0$$

$D_f=(-1,0)\cup(0,+\infty)$

c. $f(x)=\log_2\dfrac{|x-2|}{\log_3(x+4)}$

$$\begin{cases} x+4>0 \\ x-2\neq 0 \\ \log_3(x+4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x\neq 2 \\ x+4>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x\neq 2 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<2 \vee x>2$$

$D_f=(-3,2)\cup(2,+\infty)$

d. $f(x)=\sqrt{\log_{0.5}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}>0 \\ x^2-1\neq 0 \\ \log_{0.5}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \vee 1<x<2 \vee x>3 \\ \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{5}\leq x<2 \vee x>3$$

$D_f=\left[\dfrac{7}{5},2\right)\cup(3,+\infty)$

e. $f(x)=\sqrt{x^2+4|x|}$

$$x^2+4|x|\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x\geq 0 \wedge x\geq 0 \\ x^2-4x\geq 0 \wedge x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x<0 \end{cases}$$

$D_f=R$

Si può osservare che *f* è pari; infatti $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+4|-x|}=\sqrt{x^2+4|x|}=f(x)$

f. $f(x)=x^3-2x\sqrt{x^2-1}$

$x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1 \vee x\geq 1$

$D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Si può osservare che *f* è dispari; infatti

$f(-x)=(-x)^3-2(-x)\sqrt{(-x)^2-1}=-\left(x^3-2x\sqrt{x^2-1}\right)=-f(x)$

g. $f(x) = |x|\sqrt{x^2 - x}$

$x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1$

$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

Si può osservare che *f* non è né pari né dispari.