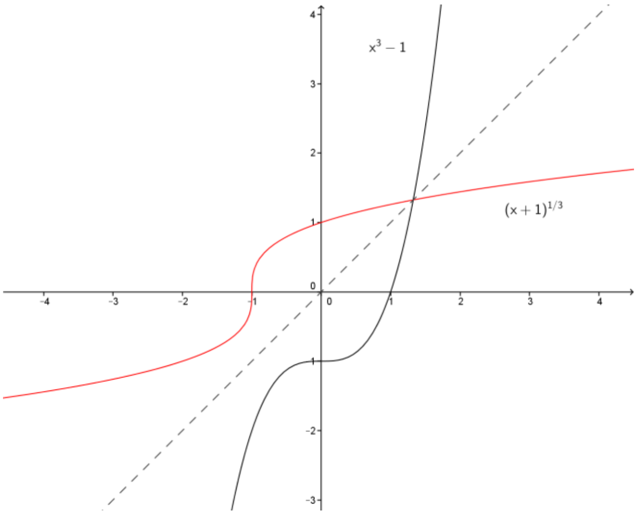
ESERCIZI 03 – FUNZIONE INVERSA, FUNZIONE COMPOSTA, TOPOLOGIA E DEFINIZIONE DI LIMITE

1. Date le seguenti funzioni definite in R , determinare un insieme A dove sono invertibili e disegnarne il grafico a partire da quello di *f*.
   a. $f(x) = x^3 - 1$
   b. $f(x) = (x-1)^4$
   c. $f(x) = |x+2| - 1$
   d. $f(x) = x^3 - 2x^2$
   e. $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$

Soluzioni

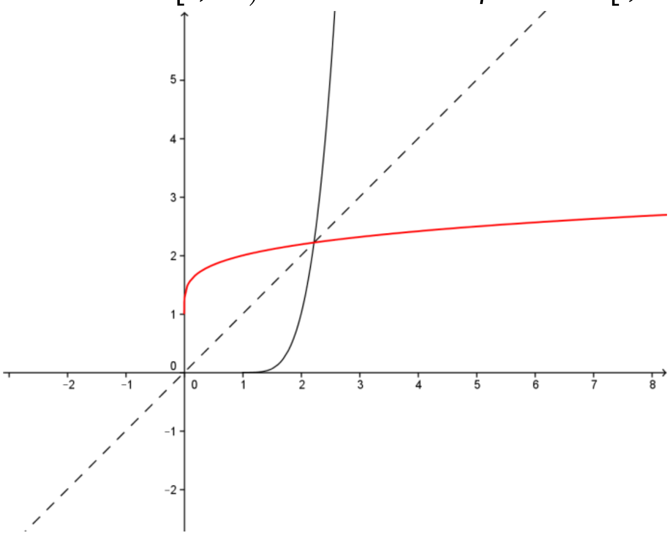
a. $f(x) = x^3 - 1$

f è strettamente monotona crescente per ogni $x \in R$ quindi è invertibile in *A*=*R* con codominio *R*.

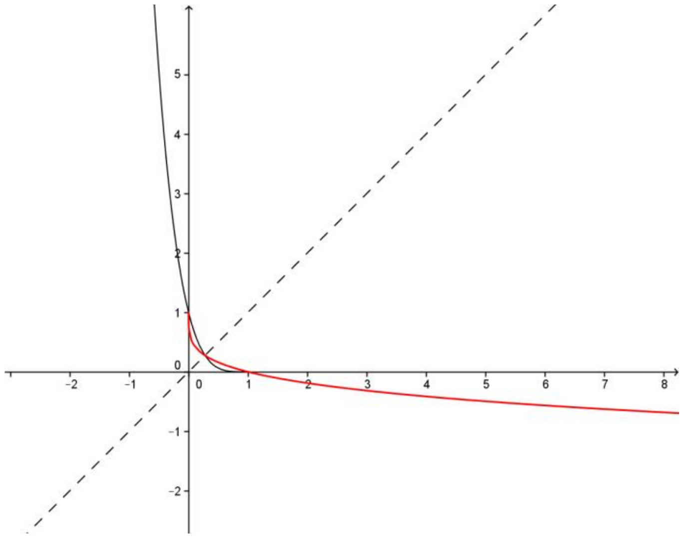


b. $f(x) = (x-1)^4$

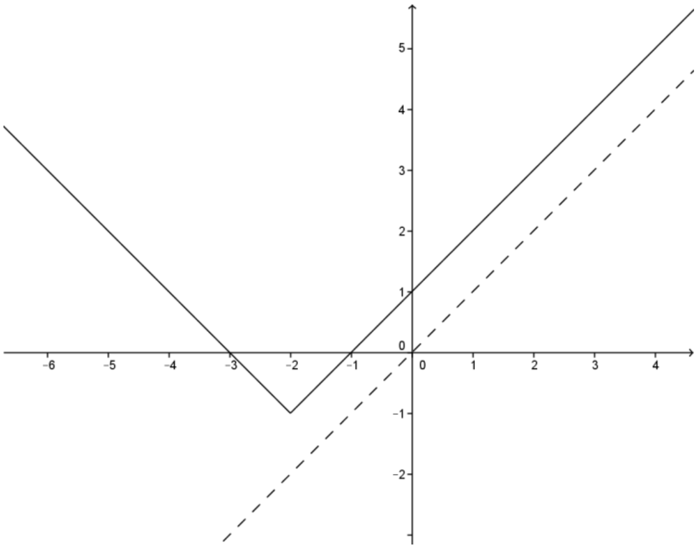
f è strettamente monotona crescente per $x \geq 1$ quindi è invertibile in $A = [1,+\infty)$ con dominio $X = [0,+\infty)$ e codominio $\operatorname{Im} f^{-1} = A = [1,+\infty)$.



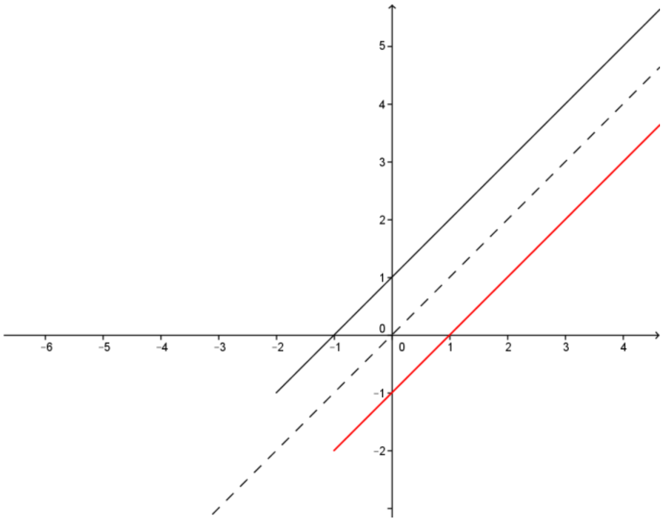
f è strettamente monotona decrescente per $x \leq 1$ quindi è invertibile in $A = (-\infty,1]$ con dominio $X = [0,+\infty)$ e codominio $\operatorname{Im} f^{-1} = A = (-\infty,1]$.



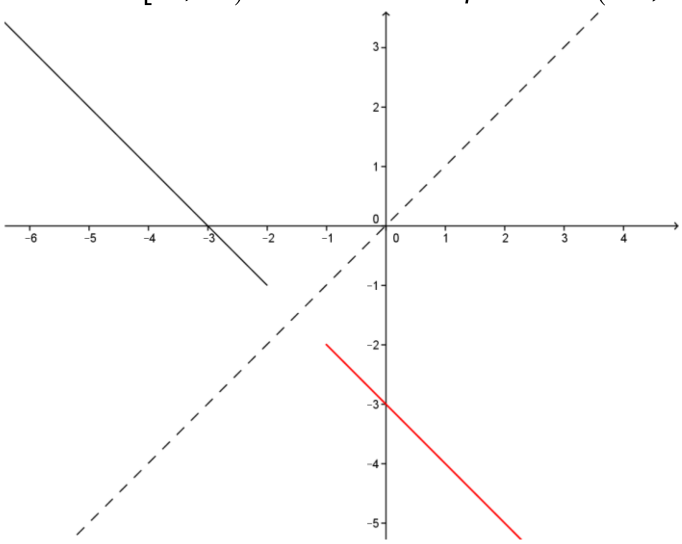
c. $f(x) = |x+2| - 1$



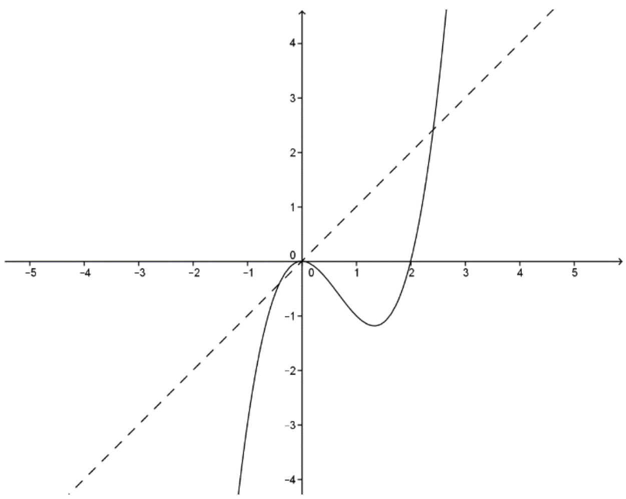
f è strettamente monotona crescente per $x \geq -2$ quindi è invertibile in $A = [-2,+\infty)$ con dominio $X = [-1,+\infty)$ e codominio $\operatorname{Im} f^{-1} = A = [-2,+\infty)$.



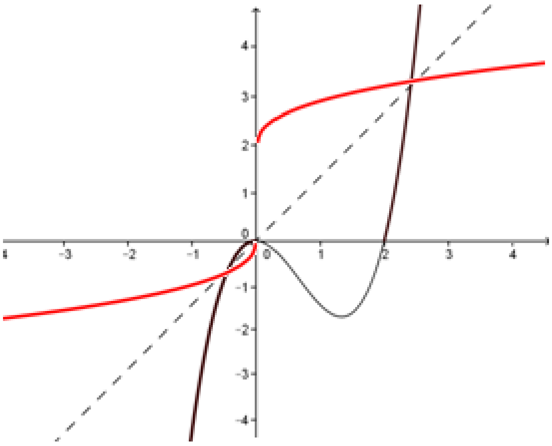
f è strettamente monotona decrescente per $x \le -2$ quindi è invertibile in $A = (-\infty, -2]$ con dominio $X = [-1, +\infty)$ e codominio $\operatorname{Im} f^{-1} = A = (-\infty, -2]$.



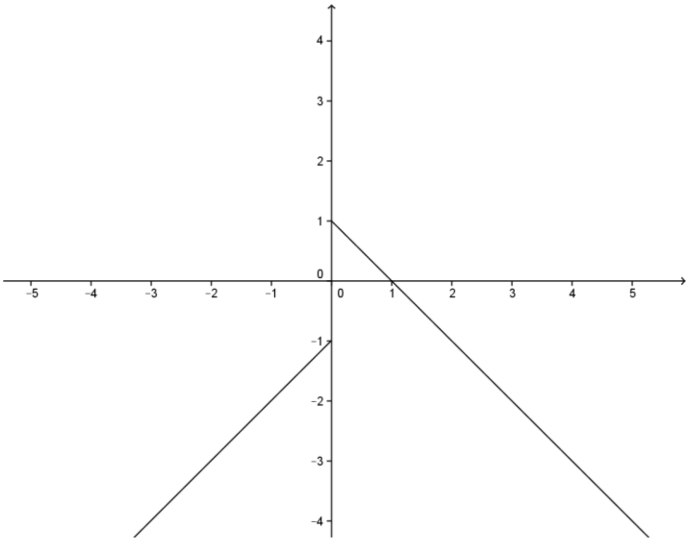
d. $f(x) = x^3 - 2x^2$



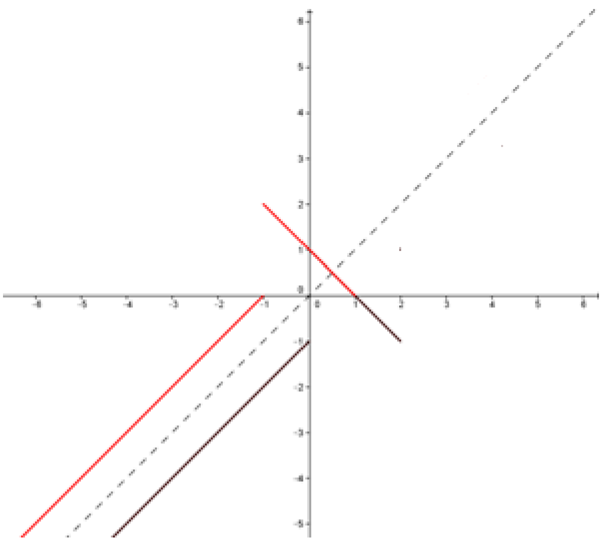
f è strettamente monotona crescente per $x \le 0 \vee x \ge 2$ quindi è invertibile in $A = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ con dominio $X = R$ e codominio $\operatorname{Im} f^{-1} = A$. Si osserva che f è continua ma l'inversa di *f* in *A* non è continua



e. $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$



La funzione è invertibile in $A = (-\infty, 2]$ anche se in tale intervallo non è strettamente monotona, questo può succedere infatti *f* non è continua in *A* e la corrispondenza è biunivoca.



2. Date le seguenti coppie di funzioni scrivere le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ determinandone il dominio

a. $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = \log_2 x$

$g \circ f = \log_2\left(x^3 - 1\right), x > 1$

$f \circ g = (\log_2 x)^3 - 1, x > 0$

b. $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$

$g \circ f = \sqrt{x^3 - 1}, x \geq 1$

$f \circ g = \left(\sqrt{x}\right)^3 - 1 = \sqrt{x^3} - 1, x \geq 0$

c. $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \log_2 x$

$g \circ f = \log_2\left(x^2 + 1\right), x \in R$

$f \circ g = (\log_2 x)^2 + 1, x > 0$

d. $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$

$g \circ f = \sqrt{x^2 + 1}, x \in R$

$f \circ g = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1, x \geq 0$

e. $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = \dfrac{1}{x}$

$g \circ f = \dfrac{1}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1$

$f \circ g = \dfrac{1}{x^2}$ -1 $x \neq 0$

3. Dati i seguenti insiemi determinare:
- l'insieme dei punti interni;
- l'insieme dei punti di frontiera;
- l'insieme dei punti di accumulazione.

a. $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2\} \cup \{4,7\}$
- l'insieme dei punti interni è $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\}$;
- l'insieme dei punti di frontiera è $\{-1, 2, 4, 7\}$;
- l'insieme dei punti di accumulazione è $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}$;

b. $A = \{y \in \mathbb{R} : y = x^2, x \in \mathbb{N}\}$

L'insieme dato equivale a $\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots, x^2, \ldots\}$ pertanto si ha che
- l'insieme dei punti interni è l'insieme vuoto;
- l'insieme dei punti di frontiera è l'insieme stesso;
- l'insieme dei punti di accumulazione è l'insieme vuoto;

c. $A = \{x \in \mathbb{R} : (-1 \leq x < 2 \vee x > h) \wedge h > 2\}$
- L'insieme dei punti interni è $\{x \in \mathbb{R} : (-1 < x < 2 \vee x > h) \wedge h > 2\}$;

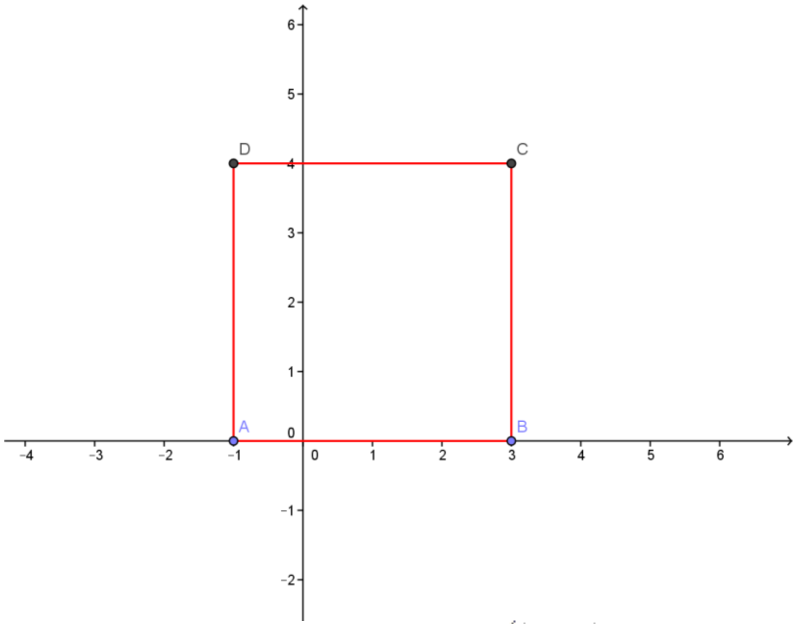
- l'insieme dei punti di frontiera è $\{-1, 2, h\}$ con h □ 2;
- l'insieme dei punti di accumulazione è $\{x \in \mathbb{R} : (-1 \le x \le 2 \vee x \ge h) \wedge h > 2\}$;

d. $A = \{x \in \mathbb{R} : (-1 \le x < 2 \vee x < h) \wedge h < -1\}$

- L'insieme dei punti interni è $\{x \in \mathbb{R} : (-1 < x < 2 \vee x < h) \wedge h < -1\}$;
- l'insieme dei punti di frontiera è $\{h, -1, 2\}$ con h □ □ 1;
- l'insieme dei punti di accumulazione è $\{x \in \mathbb{R} : (-1 \le x \le 2 \vee x \le h) \wedge h < -1\}$;

e. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x_1 < 3 \wedge 0 < x_2 \le 4\}$

- L'insieme dei punti interni è $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 3 \wedge 0 < x_2 < 4\}$;
- l'insieme dei punti di frontiera sono i punti del quadrato in figura ossia $F_1 \cup F_2$ dove
  $F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 = -1 \wedge 0 \le x_2 \le 4) \vee (x_1 = 3 \wedge 0 \le x_2 \le 4)\}$
  $F_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \le x_1 \le 3 \wedge x_2 = 0) \vee (-1 \le x_1 \le 3 \wedge x_2 = 4)\}$;



- l'insieme dei punti di accumulazione è $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x_1 \le 3 \wedge 0 \le x_2 \le 4\}$;

f. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4 \ \wedge \ x_2 > 0\}$
- L'insieme dei punti interni è l'insieme stesso A;
- l'insieme dei punti di frontiera è
  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2 = 4 \wedge x_2 > 0) \vee (-2 \le x_1 \le 2 \wedge x_2 = 0)\}$;
- l'insieme dei punti di accumulazione è $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 4 \ \wedge \ x_2 \ge 0\}$;

g. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 4 \ \wedge \ x_1 \ge 0 \ \wedge \ x_2 \ge 0\}$
- L'insieme dei punti interni è $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4 \ \wedge \ x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 > 0\}$;

- l'insieme dei punti di frontiera è $\{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4 \ \wedge \ x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 > 0\}$ $\{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 2 \wedge x_2 = 0\}$ $\{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0 \wedge 0 \le x_2 \le 2\}$;
- l'insieme dei punti di accumulazione è l'insieme stesso *A*;

h. $A = \{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1^2 + 5x_1 + 6 \ \wedge \ x_1 > 0\}$

- L'insieme dei punti interni è l'insieme stesso *A*;
- l'insieme dei punti di frontiera è $\{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 : (x_2 = x_1^2 + 5x_1 + 6 \wedge x_1 > 0) \vee (x_1 = 0 \wedge x_2 \ge 6)\}$;
- l'insieme dei punti di accumulazione è $\{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 : x_2 \ge x_1^2 + 5x_1 + 6 \ \wedge \ x_1 \ge 0\}$;

4. Verificare i seguenti limiti usando la definizione.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-4}{x-2}=2$

Si osserva che il dominio di $f(x)=\frac{x-4}{x-2}$ è $R-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ quindi dalla definizone si deve verificare se

$$\forall I_\varepsilon(2)\,\exists I_\delta(0) \text{ tale che } x\in I_\delta(0), x\neq 0 \Rightarrow f(x)\in I_\varepsilon(2)$$

si può anche dire che $\forall \varepsilon>0\,\exists,\delta>0$ tale che $|x|<\delta, x\neq \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$ ossia

$$2-\varepsilon<\frac{x-4}{x-2}<2+\varepsilon .$$

Poiché $x_0=0$ si può supporre *x* <2 quindi, moltiplicando per *x* – 2 si ha il sistema

$$\begin{cases} x-4>(2+\varepsilon)(x-2) \Leftrightarrow x(1-\varepsilon)>-2\varepsilon \\ x-4<-\varepsilon(x-2) \Leftrightarrow x(1+\varepsilon)<2\varepsilon \end{cases}$$

Senza perdere di generalità si può supporre $0<\varepsilon<1$quindi si ottiene$\frac{-2\varepsilon}{1-\varepsilon}<x<\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$ che, poiché $\frac{-2\varepsilon}{1-\varepsilon}<0$ e $\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$, è un intorno di 0 e il limite **è verificato**.

b) $\lim_{x\to 2}(x^2-1)=5$

Si osserva che il dominio di $f(x)=x^2-1$ è R quindi dalla definizione si deve verificare se

$$\forall I_\varepsilon(5)\,\exists I_\delta(2) \text{ tale che } x\in I_\delta(2), x\neq 2 \Rightarrow f(x)\in I_\varepsilon(5)$$

si può anche dire che $\forall \varepsilon>0\,\exists,\delta>0$ tale che $|x-2|<\delta, x\neq 2\Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$ ossia

$$5-\varepsilon<x^2-1<5+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x^2-6<\varepsilon .$$

Per ε> 6 la disequazione è verificata per ogni *x*, se $\varepsilon\le 6$ si ha il sistema

$$\begin{cases} x^2<6+\varepsilon \Leftrightarrow -\sqrt{6+\varepsilon}<x<\sqrt{6+\varepsilon} \\ x^2>6-\varepsilon \Leftrightarrow x<-\sqrt{6-\varepsilon} \vee x>\sqrt{6-\varepsilon} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{6+\varepsilon}<x<-\sqrt{6-\varepsilon} \vee \sqrt{6-\varepsilon}<x<\sqrt{6+\varepsilon} .$$

Si osserva che né $-\sqrt{6+\varepsilon}<x<-\sqrt{6-\varepsilon}$ né $\sqrt{6-\varepsilon}<x<\sqrt{6+\varepsilon}$ rappresentano un'intorno di 2 quindi il limite **non è verificato**.

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+2x}{6x-5} = \frac{1}{3}$

Si osserva che il dominio di $f(x) = \frac{1+2x}{6x-5}$ è $R - \left\{\frac{5}{6}\right\} = \left(-\infty, \frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$ quindi dalla definizione si deve verificare se

$$\forall I_\varepsilon\left(\frac{1}{3}\right) \exists I_a(+\infty) \text{ tale che } x \in I_a(+\infty), a > \frac{5}{6} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon\left(\frac{1}{3}\right)$$

si può anche dire che $\forall \varepsilon > 0\ \exists a > \frac{5}{6}$ tale che $x > a \Rightarrow \left| f(x) - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$ ossia

$$\frac{1}{3} - \varepsilon < \frac{1+2x}{6x-5} < \frac{1}{3} + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{8}{3(6x-5)} < \varepsilon .$$

Poiché si cerca un intorno di +∞, si suppone $x > \frac{5}{6}$, quindi la disequazione diventa il sistema

$$\begin{cases} 8 < 3\varepsilon(6x-5) \\ 8 > -3\varepsilon(6x-5) \\ x > \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{15\varepsilon+8}{18\varepsilon} = \frac{5}{6} + \frac{4}{9\varepsilon} \\ x > \frac{15\varepsilon-8}{18\varepsilon} = \frac{5}{6} - \frac{4}{9\varepsilon} \\ x > \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x > a \text{ con } a = \frac{5}{6} + \frac{4}{9\varepsilon} > \frac{5}{6} .$$

Si osserva che a cresce al decrescere di ε e il limite **è verificato**.

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$

Si osserva che il dominio di $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ è $R - \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$ e che alla "sinistra" di 1 la funzione è negativa e alla "destra" di 1 la funzione è positiva, i limiti saranno diversi a meno che non siano entrambi 0.

Verifichiamo che il limite da sinistra è -∞ ossia $\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$ che per la definizione di limite da sinsitra equaivale a $\forall I_a(-\infty)\ \exists I_\delta(1)$ tale che $x \in I_\delta^-(1), x \neq 1 \Rightarrow f(x) \in I_a(-\infty)$

si può anche dire che $\forall a\ \exists \delta > 0$ tale che $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow f(x) < a$.

Per comodità di calcolo si suppone a>0 e si può considerare la disequazione $f(x) < -a$ con a>0; infatti si osserva che $f(x) < -a < 0 \Rightarrow f(x) < a$.

$$f(x) < -a \text{ con } a>0 \text{ equivale a } \frac{x}{x^2-1} < -a \Leftrightarrow \frac{ax^2+x-a}{x^2-1} < 0 .$$

Se si considera in un intorno sinistro di 1, l'espressione x^2-1 risulta negativa e pertanto si ha il sistema $\begin{cases} ax^2+x-a > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$, la cui soluzione è $0 < \frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a} < x < 1$ che rappresenta un intorno sinistro di 1, quindi $\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$ è verificato (nello stesso modo si può verificare che $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$) .

Si deduce che, essendo il limite da sinistra diverso dal limite da destra, $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}$ **non esiste**.

e) $\lim_{x\to -\infty}(1-3x)=+\infty$

Si osserva che il dominio di $f(x)=1-3x$ è tutto ***R*** quindi dalla definizone si ha:

$$\forall I_a(+\infty)\,\exists I_b(+\infty)\text{ tale che } x\in I_b(+\infty)\Rightarrow f(x)\in I_a(+\infty)$$

si può anche dire che $\forall a>0\ \exists b$ tale che $x<b\Rightarrow f(x)>a$.

$f(x)>a$ equivale a $1-3x>a$ ossia $x<\frac{1-a}{3}=b$ o $x\in(-\infty,b)$ con $b=\frac{1-a}{3}$.

Quindi se $x<\frac{1-a}{3}$ allora $f(x)>a$ comunque si scelga a e il limite **è verificato**.