ESERCIZI 04 – CALCOLO DI LIMITI

1. Verificare che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi per $x \to x_0$.
Quindi determinare se per $x \to x_0$: $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine oppure $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore o inferiore a $g(x)$.

a. $f(x)=(x-1)^{1/2}, g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ per $x \to 1$

$f(x)=(x-1)^{1/2}$ è definita per $x \geq 1$ quindi esiste solo

$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{1/2}=0^+$,

$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)^{1/3}=0$

Per $x \to 1^+$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^{1/2}}{\sqrt[3]{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^{1/2}}{(x-1)^{1/3}}=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{6}}=0^+$$

quindi $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

b. $f(x)=(x-1)^{-1/2}, g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ per $x \to +\infty$

$f(x)=(x-1)^{-1/2}$ è definita per $x>1$ quindi $+\infty$ è punto di accumulazione del dominio $\lim_{x\to+\infty}(x-1)^{-1/2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-1)^{1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-1)^{1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0^+$,

$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ è definita per $x \neq 1$ quindi $+\infty$ è punto di accumulazione del dominio $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^{-1/3}=0^+$

Per $x \to +\infty$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^{1/3}}{(x-1)^{1/2}}=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^{-\frac{1}{6}}=0$$

quindi $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

Si osservi che il risultato è coerente con quello dell'esercizio a).

c. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-x^2}, g(x)=\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-x^2}$, è definita per $\sqrt{x}-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1-x\sqrt{x}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x>0 \wedge x \neq 1$

quindi $+\infty$ è punto di accumulazione del dominio $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}-x^2}=0^-$,

$g(x)=\frac{1}{x}$ è definita per $x \neq 0$ quindi +∞ è punto di accumulazione del dominio

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

Per $x \to +\infty$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}-x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}-x^2} = 0^-$

quindi $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

Nei seguenti esercizi $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi quindi valore reale compreso +∞ e -∞ sono punti di accumulazione del loro dominio.

d. $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4x\right), g(x)=x^3+1$ per $x \to -1$,

$\lim_{x\to-1}\left(x^2-1\right)\left(x^2-4x\right)=0$, $\lim_{x\to-1}\left(x^3+1\right)=0$

Per $x \to -1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4x\right)}{x^3+1} = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)x(x-4)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} = \lim_{x\to-1}\frac{(x-1)x(x-4)}{\left(x^2-x+1\right)} = -\frac{10}{3}$$

quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to -1$.

e. $f(x)=x^3+2x^2+2x+1, g(x)=2x^2+4x-6$ per $x \to 1$

$\lim_{x\to1}\left(x^3+2x^2-2x-1\right)=\lim_{x\to1}\left(x^2-1\right)(2x+1)=0$,

$\lim_{x\to1}\left(2x^2+4x-6\right)=2\lim_{x\to1}\left(x^2+2x-3\right)=2\lim_{x\to1}(x-1)(x+3)=0$

Per $x \to 1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)(2x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to1}\frac{(x+1)(2x+1)}{(x+3)} = \frac{3}{2}$$

quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to 1$.

f. $f(x)=x^3-x^2+2x-2$, $g(x)=x^3-1$ per $x \to 1$

$\lim_{x\to1}\left(x^3-x^2+2x-2\right)=\lim_{x\to1}\left(x^2+2\right)(x-1)=0$, $\lim_{x\to1}\left(x^3-1\right)=\lim_{x\to1}(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$

Per $x \to 1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+2\right)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+2}{x^2+x+1} = 1$

quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to 1$ inoltre, poiché il limite del rapporto è 1, si può dire che sono in relazione di asintotico o semplicemente asintotici per $x \to 1$.

g. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$, $g(x) = x^4 - 1$ per $x \to 1$
$\lim_{x \to 1}(x^3 - x^2 + 2x - 2) = \lim_{x \to 1}(x^2 + 2)(x - 1) = 0$, $\lim_{x \to 1}(x^4 - 1) = \lim_{x \to 1}(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$
Per $x \to 1$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, per determinare se sono o meno dello stesso ordine si calcola $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 2)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{4}$
quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to 1$, non si può dire che sono asintotici per $x \to 1$.

2. Studiare la continuità delle seguenti funzioni nel loro dominio e nei punti di frontiera.
   a. $f(x) = \ln(1 + x^2)$
   b. $f(x) = \frac{x^2 + |x| - 2}{|x - 1|}$
   c. $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$
   d. $f(x) = x \ln \frac{1}{x^2}$
   e. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x - 1|} & \text{se } 0 < x \le 4 \\ e^{-x} & \text{se } -2 \le x \le 0 \end{cases}$
   f. $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 - 1)}{(x + 1)^2} & \text{se } 0 < x \le 1 \\ (x - 1)^{x^2 - 1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

a. La funzione è continua per ogni valore di *x* del dominio ***R***

b. La funzione è continua per ogni valore di *x* del dominio
$D_{f(x)} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

c. La funzione è continua per ogni valore di *x* del dominio
$D_{f(x)} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

d. La funzione è continua per ogni valore di *x* del dominio
$D_{f(x)} = [-2, 1) \cup (1, 4]$

e. Il dominio della funzione è $D_{f(x)} = (0, +\infty)$

La funzione è continua per ogni valore di *x* appartenente a $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

3. Determinare la natura dei punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

g. $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{|x-1|}$

x = 1 punto di discontinuità **non eliminabile** (II specie).

h. $f(x)=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x+3}{x}}}$

x = 0 punto di discontinuità **non eliminabile** (I specie, a salto),

x = **-** 3 punto di discontinuità **non eliminabile** (II specie).

i. $f(x)=\dfrac{1-x}{2x^2-x-1}$

x = 1 punto di discontinuità **eliminabile** (III specie),

x = **-** 1/2 punto di discontinuità **non eliminabile** (II specie).

j. $f(x)=\dfrac{|1-4x|}{4x-1}$

x = 0 punto di discontinuità **eliminabile** (III specie).

x = 1/4 punto di discontinuità **non eliminabile** (I specie, a salto).