ESERCIZI 05 – CONTINUITA' E DERIVABILITA'

1) Date le seguenti funzioni determinare se sono verificate le ipotesi dei teoremi di Weierstrass e Darboux nell'intervallo indicato e, nel caso siano applicabili, determinare la/le controimmagini dei valori y_0 indicati ossia il/i valori di x per cui $f(x) = y_0$.

Soluzioni

a. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $[-2,2]$, $y_0 = 1$

f è continua per ogni $x \in [-2,2]$

$\sqrt{4-x^2} = 1 \Leftrightarrow 4-x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \in [-2,2]$. I valori di x per cui $f(x) = 1$ sono quindi $x = \pm\sqrt{3} \in [-2,2]$.

b. $f(x) = \sqrt{|x^2-1|}$, $[0,2]$, $y_0 = 1$

f è continua per ogni $x \in [0,2]$

$$\sqrt{|x^2-1|} = 1 \Leftrightarrow |x^2-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 = 1 & \text{se } x \le -1 \vee x \ge 1 \\ -x^2+1 = 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} & \text{se } x \le -1 \vee x \ge 1 \\ x = 0 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

$x = -\sqrt{2} \notin [0,2]$ ma $x = 0, \sqrt{2} \in [0,2]$. I valori di x per cui $f(x) = 1$ sono quindi $x = 0, \sqrt{2} \in [0,2]$.

c. $f(x) = \ln(x+1)$, $[0,2]$, $y_0 = 1$

f è continua per ogni $x \in [0,2]$

$$\ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = e-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = e-1 \in [0,2].$$

Il valore di x per cui $f(x) = 1$ è quindi $x = e-1 \in [0,2]$.

d. $f(x) = (x-1)^2 + 1$, $[0,2]$, $y_0 = 2$

f è continua per ogni $x \in [0,2]$

$(x-1)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x-1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0,2 \in [0,2]$. I valori di x per cui $f(x) = 2$ sono quindi $x = 0,2 \in [0,2]$.

2) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni, nei punti assegnati come limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

a. $f(x) = 2x^2 - 2$, $x_0 = 0$

b. $f(x) = \ln 2x$, $x_0 = 2$

c. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x_0 = 2$

d. $f(x) = e^{3x}$, $x_0 = 1$

e. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $x_0 = -1$

f. $f(x)=\sqrt{3-x},\ x_0=2$

Soluzioni

a. $f(x)=2x^2-2,\ x_0=0$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h^2-2-(-2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h^2}{h}=0$$

b. $f(x)=\ln 2x,\ x_0=2$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(2(2+h))-\ln 4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(\frac{4+2h}{4}\right)}{h}==\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{1}{2}$$

c. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},\ x_0=2$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{(2+h)^2-1}{(2+h)-1}-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3+h-3}{h}=1$$

d. $f(x)=\mathrm{e}^{3x},\ x_0=1$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{3(1+h)}-e^3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^3e^{3h}-e^3}{h}=e^3\lim_{h\to0}\frac{e^{3h}-1}{h}=$$

$$=e^3\lim_{h\to0}\frac{e^{3h}-1}{3h}3=3e^3$$

e. $f(x)=\dfrac{x}{x-2},\ x_0=-1$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{-1+h}{h-3}-\frac{1}{3}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h-h}{3h(h-3)}=\lim_{h\to0}\frac{2}{3(h-3)}=-\frac{2}{9}$$

f. $f(x)=\sqrt{3-x},\ x_0=2$

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{3-(2+h)}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1-h}-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\left(\sqrt{1-h}-1\right)\left(\sqrt{1-h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1-h}+1\right)}=\lim_{h\to0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{1-h}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

3) Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni utilizzando le regole di derivazione.

a. $f(x)=2e^{4x+1}$

b. $f(x)=\ln\left(x-3x^2\right)$

c. $f(x)=x^2\ln\left(x+5x^2\right)$

d. $f(x)=\mathrm{sen}^2\,x-x^2$

e. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2}$

Soluzioni

a. $f(x) = 2e^{4x+1}$

$f'(x) = 8e^{4x+1}$

b. $f(x) = \ln\left(x - 3x^2\right)$

$f'(x) = \dfrac{1-6x}{x-3x^2}$

c. $f(x) = x^2 \ln\left(x + 5x^2\right)$

$f'(x) = 2x \ln\left(x + 5x^2\right) + \dfrac{x(1+10x)}{1+5x}$

d. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - x^2$

$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2x = \operatorname{sen} 2x - 2x$

e. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x-2}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 1}{(x-2)^2}$

4) Determinare, se possibile, le equazioni delle rette tangenti alle seguenti funzioni, nei punti assegnati.

a. $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 0$, $x = 3/2$, $x = 3$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$, $x =$ □ 1, $x = 0$, $x = 4$

c. $f(x) = e^{x^2}\left(x^3 - 2x + 1\right)$, $x =$ □ 1, $x = 0$, $x = 1$

Soluzioni

a. $f(x) = x^2 - 3x$,

$f'(x) = 2x - 3$

$x = 0$: $f(0) = 0,\ f'(0) = -3 \Rightarrow y = -3x$;

$x = 3/2$: $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{9}{4},\ f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{9}{4}$;

$x = 3$: $f(3) = 0,\ f'(3) = 3 \Rightarrow y = 3(x-3) \Rightarrow y = 3x - 9$.

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$,

$f'(x) = \dfrac{(2x+1)x - \left(x^2 + x + 1\right)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$x = -1$: $f(-1) = -1,\ f'(-1) = 0 \Rightarrow y + 1 = 0(x+1) \Rightarrow y = -1$;

$x = 0$: non esiste retta tangente in $x = 0$ poichè la funzione non è definita in tale punto;

$x = 4$: $f(4)=\frac{21}{4}$, $f'(4)=\frac{15}{16} \Rightarrow y-\frac{21}{4}=\frac{15}{16}(x-4) \Rightarrow y=\frac{15}{16}x+\frac{3}{2}$.

c. $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-2x+1\right)$,

$f'(x)=2xe^{x^2}\left(x^3-2x+1\right)+e^{x^2}\left(3x^2-2\right)=e^{x^2}\left(2x^4-x^2+2x-2\right)$

$x = -1$: $f(-1)=2e,\ f'(-1)=-3e \Rightarrow y-2e=-3e(x+1) \Rightarrow y=-3ex-e$;

$x = 0$: $f(0)=1,\ f'(0)=-2 \Rightarrow y-1=-2x \Rightarrow y=-2x+1$;

$x = 1$: $f(1)=0,\ f'(1)=e \Rightarrow y=e(x-1) \Rightarrow y=ex-e$.

5) Studiare la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni:

Soluzioni

a. $f(x)=\ln(1+|x|)=\begin{cases}\ln(1+x) & \text{se } x\geq 0\\ \ln(1-x) & \text{se } x<0\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x} & \text{se } x>0\\ \frac{-1}{1-x} & \text{se } x<0\end{cases}$

f è continua per ogni *x* reale e derivabile per $x \neq 0$; infatti non è derivabile per *x* =0 poiché $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=1, \lim_{x\to 0^-} f'(x)=-1$.

b. $f(x)=|\ln(1+x)|=\begin{cases}\ln(1+x) & \text{se } \ln(1+x)\geq 0\\ -\ln(1+x) & \text{se } \ln(1+x)<0\end{cases}=\begin{cases}\ln(1+x) & \text{se } x\geq 0\\ -\ln(1+x) & \text{se } -1<x<0\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x} & \text{se } x>0\\ \frac{-1}{1+x} & \text{se } x<0\end{cases}$

f è continua per ogni $x>-1$ e derivabile per $x \neq 0$; infatti non è derivabile per *x* =0 poiché $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=1, \lim_{x\to 0^-} f'(x)=-1$.

c. $f(x)=\frac{x^2+|x^2-1|}{|x|}=\begin{cases}\frac{2x^2-1}{x} & \text{se } x>1\\ \frac{2x^2-1}{-x} & \text{se } x<-1\\ \frac{1}{x} & \text{se } 0<x\leq 1\\ \frac{1}{-x} & \text{se } -1\leq x<0\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}\frac{2x^2+1}{x^2} & \text{se } x>1\\ \frac{-2x^2-1}{x^2} & \text{se } x<-1\\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } 0<x<1\\ \frac{1}{x^2} & \text{se } -1<x<0\end{cases}$

f è continua per ogni $x \neq 0$ e derivabile per $x \neq 0,-1,1$; infatti non è derivabile per *x* =1 poiché $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=3, \lim_{x\to 1^-} f'(x)=-1$ e non è derivabile per *x* =-1 poiché $\lim_{x\to -1^+} f'(x)=1, \lim_{x\to -1^-} f'(x)=-3$

d. $f(x)=e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

f è continua per ogni *x* reale e derivabile per $x \neq 0$; infatti non è derivabile per *x* =0 poiché $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-1, \lim_{x\to 0^-} f'(x)=1$.

e. $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}} = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

f è continua e derivabile per $x \neq 0$.

f. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } x > 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x > 0 \\ -e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

f è continua ogni *x* reale e derivabile per ogni *x* reale; infatti per *x* =0

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1, \lim_{x\to 0^-} e^{-x} = 1$ quindi $\lim_{x\to 0} f(x)=1= f(0)$ quindi *f* è continua.
- $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = -1, \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\lim_{x\to 0^-} e^{-x} = -1$ quindi *f* è derivabile.

g. $f(x)=\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{1-x^2} & \text{se } x > 1 \\ 2x-2 & \text{se } x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -\frac{x-1}{1+x} & \text{se } x > 1 \\ 2x-2 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ e $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

$f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{(1+x)^2} & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

f è continua per ogni *x* reale e derivabile per $x \neq 1$; infatti per *x* =1

$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}, \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} 2 = 2$ quindi *f* non è derivabile.

h. $f(x)=\sqrt{|x^2-3x+2|} = \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} & \text{se } x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ \sqrt{-x^2+3x-2} & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$ $\lim_{h\to 1} f(x)=0$

f è continua ogni *x* reale e derivabile per $x \neq 1{,}2$; infatti

$f'(x)=\begin{cases} \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} & \text{se } x < 1 \vee x > 2 \\ \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}} & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$,

e per *x* =1,2 si ha $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=-\infty, \lim_{x\to 1^+} f'(x)=+\infty, \lim_{x\to 2^-} f'(x)=-\infty, \lim_{x\to 2^+} f'(x)=+\infty$ quindi *f* non è derivabile.

i. $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\geq 1 \\ e^{x-1}+1 & x<1 \end{cases}$

$D_{f(x)}=(-\infty,+\infty)$, $f(x)$ è continua per ogni x appartenente al dominio e derivabile per ogni x appartenente al dominio escluso $x = 1$ ove presenta un punto angoloso.

j. $f(x)=x-\sqrt{x+1}$

$D_{f(x)}=[-1,+\infty)$, $f(x)$ è continua per ogni x appartenente al dominio e derivabile per ogni x appartenente al dominio escluso $x = -1$ ove presenta un punto a tangente verticale destra.

k. $f(x)=e^{\frac{|x|}{x+2}}$

$D_{f(x)}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$, $f(x)$ è continua per ogni x appartenente al dominio e presenta in $x = -2$ un punto di discontinuità non eleiminabile; la funzione è inoltre derivabile per ogni x appartenente al dominio escluso $x = 0$ ove presenta un punto angoloso.

l. $f(x)=|x|\cdot\ln|x-1|$

$D_{f(x)}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, $f(x)$ è continua per ogni x appartenente al dominio e presenta in $x = 1$ un punto di discontinuità di 2^ specie; la funzione è inoltre derivabile per ogni x appartenente al dominio.

m. $f(x)=\ln\frac{|x^2-3x+2|}{x^2+2}$

$D_{f(x)}=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$, $f(x)$ è continua per ogni x appartenente al dominio e presenta in $x = 1$ e in $x = 2$ punti di discontinuità non eliminabile; la funzione è inoltre derivabile per ogni x appartenente al dominio.

n. $f(x)=\frac{|x|e^x-1}{e^x}$

$D_{f(x)}=(-\infty,+\infty)$, $f(x)$ è continua per ogni x appartenente al dominio e derivabile per ogni x appartenente al dominio escluso $x = 0$ ove presenta un punto angoloso.

6) Analizzare gli eventuali punti di non derivabilità delle seguenti funzioni distinguendo se si tratta di punti angolosi, cuspidi o punti di flesso a tangente verticale:

a. $f(x)=|2x-x^2|$

b. $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & x>0 \\ -3-x^2 & x\leq 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} \ln x & x > 1 \\ e^{x-1} - 1 & x \le 1 \end{cases}$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$

$f(x) = \sqrt{|1 - x|}$

Soluzioni

a. $f(x) = |2x - x^2|$, $x = 0$ $x = 2$ sono punti angolosi.

b. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x > 0 \\ -3 - x^2 & x \le 0 \end{cases}$, $x = 0$ è punto angoloso.

c. $f(x) = \begin{cases} \ln x & x > 1 \\ e^{x-1} - 1 & x \le 1 \end{cases}$. La funzione è derivabile per ogni x reale.

d. $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$,$x = 0$ è punto angoloso.

e. $f(x) = \sqrt{|1 - x|}$, $x = 1$ + punto di cuspide.