ESERCIZI 06 – TEOREMI DERIVATE, MASSIMI E MINIMI

1) Calcolare i seguenti limiti.

a. $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x$ con $x_0 = 0,+\infty,-\infty$

b. $\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$ con $x_0 = 0,+\infty$

c. $\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{-1}}$ con $x_0 = 0,+\infty,-\infty$

d. $\lim_{x\to x_0}(2x-3)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ con $x_0 = 0,+\infty,-\infty$

e. $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$

f. $\lim_{x\to 1/3}\frac{\mathrm{sen}(3x-1)}{3x^2-x}$

g. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2(2x)}{1-\cos x}$

Soluzioni

a. Esiste solo $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(\frac{3+x}{x}\right)}$ perché $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{3+x}{x}\right) = -\infty$ e la base non può essere negativa.

$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{3+x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{3}{x}+1\right) = \lim_{t\to +\infty}\frac{\ln(3t+1)}{t} = 0$ quindi

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(\frac{3+x}{x}\right)} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x = \lim_{x\to -\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3 = \lim_{t\to -\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^3 = e^3$ quindi $y = e^3$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x = \lim_{x\to +\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3 = \lim_{t\to +\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^3 = e^3$ quindi $y = e^3$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

b. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}$ si tratta di una forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, applicando il teorema di De l'Hospital si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{5}\frac{5}{5+x}}{1}=0^+$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}}\right)^{\frac{1}{5}}=\lim_{t\to0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{e}$$

c. $\lim_{x\to0^-}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{-1}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\ln(1-t)}{t}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}$ si tratta di una forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, applicando il teorema di De l'Hospital si ha $-\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=0^-$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{-1}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1-t)}{t}=-\lim_{t\to0^-}\frac{\ln(1+t)}{t}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{-1}}=\lim_{t\to0^-}\frac{\ln(1-t)}{t}=-\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}=-1$$

d. $\lim_{x\to0^+}(2x-3)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-3)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}\frac{x}{2x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\frac{2x-3}{x}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-3)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2x-3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}\frac{x}{2x-3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\frac{2x-3}{x}=2$$

Oppure, applicando il teorema di De l'Hospital, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\frac{x}{x+1}}{-\frac{2}{(2x-3)^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x(x+1)}\frac{(2x-3)^2}{2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{2x^2}=2\,.$$

e. $\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$ si tratta di una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$, applicando il teorema di De l'Hospital si ha $\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}}{2x}=\frac{1}{2}$

f. $\lim_{x\to 1/3}\frac{\operatorname{sen}(3x-1)}{3x^2-x}$ si tratta di una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$, applicando il teorema di De l'Hospital si ha $\lim_{x\to 1/3}\frac{3\cos(3x-1)}{6x-1}=3$

g. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{1-\cos x}$ si tratta di una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$, applicando il teorema di De l'Hospital si ottiene $\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)}{\operatorname{sen} x}$ in cui la forma di indecisione non si risolve, conviene quindi scrivere $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{(2x)^2}\frac{(2x)^2}{1-\cos x}$; infatti, calcolando i limiti dei due fattori, si ha:

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{(2x)^2}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{1-\cos x}$ applicando il teorema di De l'Hospital si ha $\lim_{x\to 0}\frac{8x}{\operatorname{sen}x}=8\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}=8$.

Si ottiene quindi $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{1-\cos x}=8$

2) Stabilire se è applicabile il teorema di Rolle alle seguenti funzioni negli intervalli indicati e, in caso affermativo, determinare i valori che verificano la tesi del teorema.

a. $f(x)=\frac{2x^2+1}{1-5x}$ nell'intervallo $\left[-\frac{5}{2},0\right]$.

Soluzione: Sì, $c=\frac{2-3\sqrt{6}}{10}$; infatti la funzione è continua in $\left[-\frac{5}{2},0\right]$ e derivabile in $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ e $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f(0)=1$ quindi esiste $c\in\left(-\frac{5}{2},0\right)$ tale che .

$f'(x)=\frac{4x(1-5x)^2+10(1-5x)(2x^2+1)}{(1-5x)^2}=\frac{-(10x^2-4x-5)}{(1-5x)^2}=0\Leftrightarrow$ ossia

$x=\frac{2\pm 3\sqrt{6}}{10}$

di queste soluzioni solo $x=\frac{2-3\sqrt{6}}{10}\in\left[-\frac{5}{2},0\right]$.

b. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\ln x} \text{ se } x\geq 1\\ 1-x \text{ se } x<1\end{cases}$ nell'intervallo $[0,e]$.

Soluzione: No, la funzione è continua in $[0,e]$; infatti
$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1.-x)=0$ e $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\ln x}=0=f(0)$.
Ma f non è derivabile in $x = 1\in(0,e)$; infatti

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(-1)=-1$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}=+\infty$.

c. $f(x)=e^{-|x|}$ nell'intervallo $[-3,3]$

Soluzione: No, la funzione è continua in $[-3,3]$ ma, ovviamente, non è derivabile in $x = 0\in(-3,3)$.

3) Determinare il valore di k affinché sia applicabile il teorema di Rolle alla funzione $f(x)=4x^5-x^3$ nell'intervallo $[k,0]$.
Determinare successivamente i valori che verificano la tesi del teorema.

Soluzione: k = - 1/2, $c=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$; infatti la funzione è continua e derivabile in $[k,0]$ per ogni k e $f(k)=f(0)=0 \Leftrightarrow 4k^5-k^3=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=\pm\frac{1}{2}$ ma poiché deve essere k<0 allora l'intervallo è $\left[-\frac{1}{2},0\right]$. Applicando il teorema di Rolle si ha che esiste $c\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ tale che

$f'(x)=20x^4-3x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\sqrt{\frac{3}{20}}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

4) Determinare il valore di b affinché sia applicabile il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & \text{se } x\le 1 \\ 4e^{b|x-1|} & \text{se } x>1 \end{cases}$ nell'intervallo $[0,2]$
Determinare successivamente i valori che verificano la tesi del teorema.

Soluzione: $b=\frac{3}{4}$, $c=1+\frac{4}{3}\ln\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3}\right)$; infatti $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}4e^{b|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}4e^{b(x-1)}=4$ e

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+x+2\right)=4=f(1)$ e

$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}4be^{b(x-1)}=4b$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3$ quindi

$f_+'(x)=f_-'(x) \Leftrightarrow 4b=3 \Leftrightarrow b=\frac{3}{4}$, in questo caso $f'(1)=3$.

Applicando il teorema di Lagrange si ha che esiste $c\in(0,2)$ tale che

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4e^{\frac{3}{4}}-2}{2}=2e^{\frac{3}{4}}-1.$$

Calcolo di c: $f'(x)=2e^{\frac{3}{4}}-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3e^{\frac{3}{4}(x-1)}=2e^{\frac{3}{4}}-1 \\ x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+1=2e^{\frac{3}{4}}-1 \\ x<1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}(x-1)=\ln\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3}\right) \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1+\frac{4}{3}\ln\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3}\right)>1.$$

Avendo trovato una soluzione per x>1 non è necessario risolvere il secondo sistema.

5) Stabilire se è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ nell'intervallo $\left[\dfrac{1}{4},4\right]$

In caso affermativo determinare i valori che verificano la tesi del teorema.

Soluzione: Sì, *c*=1; infatti la funzione è continua e derivabile in $\left[\dfrac{1}{4},4\right]$

Applicando il teorema di Lagrange si ha che esiste $c\in\left(\dfrac{1}{4},4\right)$ tale che

$f'(c)=\dfrac{f(4)-f(1/4)}{4-1/4}=\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{2}{5}}{7/4}=0$ (il punto *c* verifica anche il teorema di Rolle).

Calcolo di *c*: $f'(x)=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=1\in\left(\dfrac{1}{4},4\right)$.

Essendo $f\left(\frac{1}{4}\right)=f(4)$ alla funzione è applicabile il teorema di Rolle.