ESERCIZI 07 – CALCOLO MASSIMI E MINIMI

1) Per ognuna delle seguenti funzioni dire se è applicabile il teorema di Fermat ad ognuno dei punti indicati e motivare la risposta.

Soluzioni

a. $f(x)=|x|+1, x_0=0, x_0=-1$

$x_0=0$: la funzione non è derivabile quindi nel punto, pur avendo minimo, il teorema non è applicabile.

$x_0=-1$: la funzione è derivabile ma il punto non è di estremo, quindi il teorema non è applicabile.

b. $f(x)=-|x+1|, x_0=0, x_0=-1$

$x_0=0$: la funzione è derivabile ma il punto non è di estremo, quindi il teorema non è applicabile.

$x_0=-1$: la funzione non è derivabile quindi nel punto, pur avendo massimo, il teorema non è applicabile.

c. $f(x)=(x+1)^3, x_0=0, x_0=-1$

$x_0=0$: la funzione è derivabile ma il punto non è di estremo, quindi il teorema non è applicabile.

$x_0=-1$: la funzione è derivabile ma il punto è di flesso quindi il teorema non è applicabile pur essendo $f'(-1)=0$.

d. $f(x)=|x+1|^3, x_0=0, x_0=-1$

$x_0=0$: la funzione è derivabile ma il punto non è di estremo quindi il teorema non è applicabile.

$x_0=-1$: la funzione è derivabile e il punto è di minimo, quindi il teorema è applicabile e $f'(-1)=0$.

2) Date le seguenti funzioni

a. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

b. $f(x)=\sqrt{|x^2-1|}$

c. $f(x)=e^{x^2+1}(x-2)$

d. $f(x)=x^4-2x^3$

e. $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$

1 - determinare i punti stazionari e, in base al segno della derivata prima, quali di questi sono di estremo relativo o locale (massimo o minimo) e di flesso a tangente orizzontale.

2 - dire quali dei punti di massimo o minimo locale sono anche di estremo globale o assoluto utilizzando altre informazioni come: dominio, codominio, segno, limiti nei punti di frontiera, grafico.

Soluzioni

a. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, Dominio: [-2,2]

1) $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=0$ unico punto stazionario, poiché $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<0$ (f strettamente crescente) e $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>0$ (f strettamente decrescente) il punto $x=0$ è di massimo locale $f(0)=2$.

2) Poiché il Dominio: [-2,2] è chiuso e limitato per il teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluti.

Poiché $0 \le \sqrt{4-x^2} \le 2$ il codominio è [0,2], il punto $x=0$ è punto di massimo globale pari a 2, $x=\pm 2$ sono punti di minimo globale pari a 0.

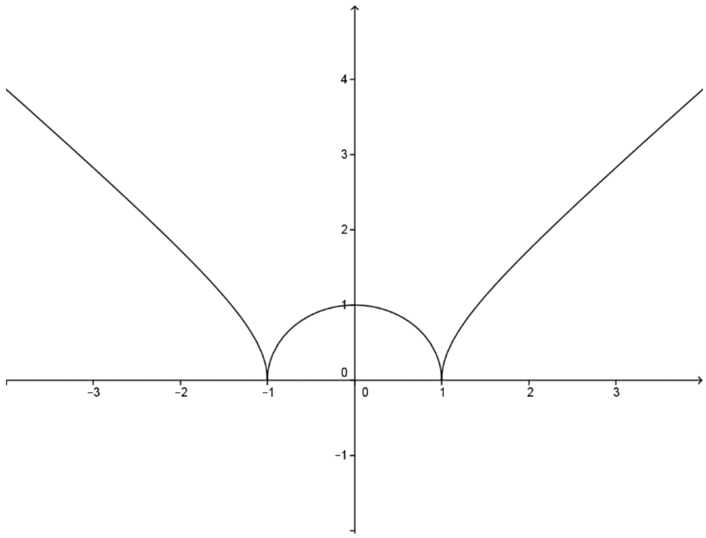
Il grafico è una semicirconferenza con centro nell'origine nel semipiano positivo delle *y*.

b. $f(x)=\sqrt{|x^2-1|}$, Dominio: R $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & \text{se } x\le -1 \vee x \ge 1\\ \sqrt{-x^2+1} & \text{se } -1<x<1\end{cases}$

1) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x<-1 \vee x>1\\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } -1<x<1\end{cases}$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ unico punto stazionario,

poiché $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<0$ (f strettamente crescente) e $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>0$ (f strettamente decrescente) il punto $x=0$ è di massimo locale $f(0)=1$.

2) Poiché il Dominio: R non è chiuso e limitato *f* potrebbe non avere estremi assoluti, tuttavia $\sqrt{|x^2-1|}\ge 0$ e il codominio è [0,+∞), dal grafico si può dire che $x=0$ è punto di massimo locale ma non globale, $x=\pm 1$ sono punti di minimo globale pari a 0.



c. $f(x)=e^{x^2+1}(x-2)$, Dominio: R

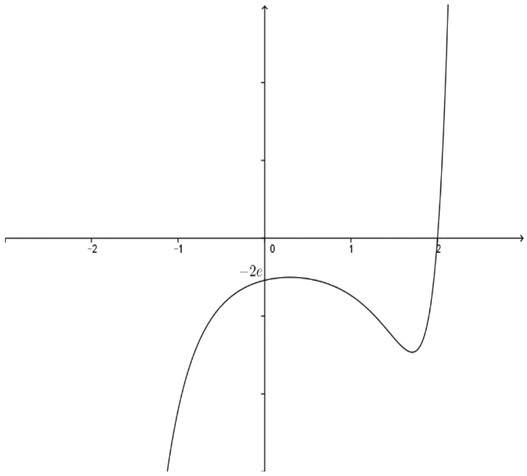
1) $f'(x)=e^{x^2+1}(2x^2-4x+1)=0 \Leftrightarrow x=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti stazionari, poiché

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*f* strettamente decrescente) e

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x>1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*f* strettamente crescente) il punto $x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ è di massimo locale $f\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cong -8.33$ e il punto $x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ è di minimo locale

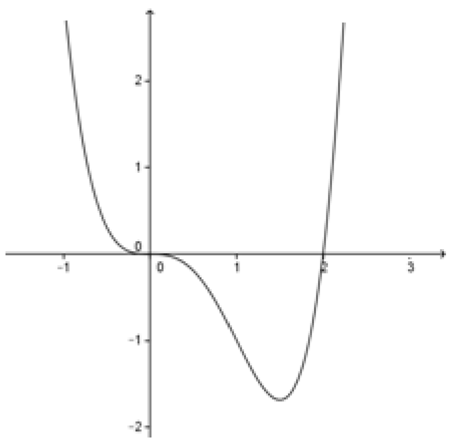
$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong -24.20$.

2) Poiché il Dominio: R non è chiuso e limitato *f* potrebbe non avere estremi assoluti; poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ il codominio è [-∞,+∞), quindi il punto $x = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ è di massimo locale non globale e il punto $x = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ è di minimo locale e non globale.



d. $f(x) = x^4 - 2x^3$, Dominio: R

1) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$ sono punti stazionari, poiché $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ (f strettamente decrescente) e $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ (f strettamente crescente) il punto $x = \frac{3}{2}$ è di minimo locale $f(1.5) = -3$ e $x = 0$ è di flesso a tangente orizzontale.



2) Poiché il Dominio: R non è chiuso e limitato *f* potrebbe non avere estremi assoluti; poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3$ (minimo locale), il grafico è quello in figura, il codominio è [-3,+∞), il punto $x = \frac{3}{2}$ è di minimo globale.

e. $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$, Dominio: $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

1) $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}$ sono punti stazionari, poiché

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<-1-\sqrt{3} \vee x<-1+\sqrt{3}$ (f strettamente crescente) e

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{3}<x<-1 \vee -1<x<-1+\sqrt{3}$

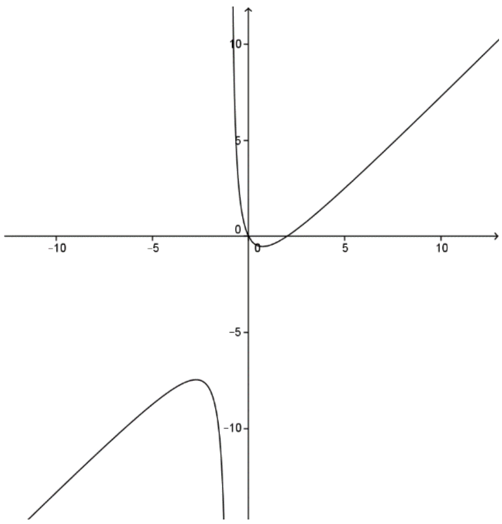
(f strettamente decrescente)

il punto $x=-1-\sqrt{3}$ è di massimo locale

$f\left(-1-\sqrt{3}\right)=-4-2\sqrt{3}\cong-7.46$ e il punto

$x=-1+\sqrt{3}$ è di minimo locale

$f\left(-1+\sqrt{3}\right)=-4+2\sqrt{3}\cong-0.53$.



2) Poiché il Dominio: $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ non è chiuso e limitato *f* potrebbe non avere estremi assoluti; inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ quindi la funzione non ha né massimo né minimo globale.

3) Date le seguenti funzioni e i punti x_0 indicati
- scrivere il polinomio e la formula di Taylor di terzo ordine con resto di Peano
- calcolare il valore approssimato nel punto *x* indicato.

Soluzione:

a. $f(x)=e^{3(x-1)}$, $x_0=1$, $x=1.1$
Calcolo derivate: $f'(x)=3e^{3(x-1)}$, $f''(x)=9e^{3(x-1)}$, $f'''(x)=27e^{3(x-1)}$
Calcolo funzione e derivate in $x_0=1$: $f(1)=1$, $f'(1)=3$, $f''(1)=9$, $f'''(1)=27$

$f(x)=P_3(x)+o\left((x-1)^3\right)$ per $x\to1$ dove

$P_3(x)=1+3(x-1)+\dfrac{9}{2}(x-1)^2+\dfrac{27}{6}(x-1)^3=\dfrac{9}{2}x^3-9x^2+\dfrac{15}{2}x-2$

quindi $P_3(1.1)=\dfrac{9}{2}1.1^3-9\cdot1.1^2+\dfrac{15}{2}1.1-2=1.3495$ e

l'errore è | *f*(1.1)- *f*(1)|=|1.3495-1|=0.3495

b. $f(x)=\ln(2x+1)^2$, $x_0=0$, $x=0.1$

$f(x)=2\ln(2x+1)$, quindi $f'(x)=\dfrac{4}{2x+1}$, $f''(x)=-\dfrac{8}{(2x+1)^2}$, $f'''(x)=\dfrac{32}{(2x+1)^3}$,

$f(0)=0$, $f'(0)=4$, $f''(0)=-8$, $f'''(0)=32$ e

$P_3(x)=4x-4x^2+\dfrac{16}{3}x^3$ quindi $P_3(0.1)=0.4-0.04+\dfrac{16}{3}\cdot0.001\approx0.365333$

$f(x)=P_3(x)+o\left(x^3\right)$ per $x\to0$.

c. $f(x) = 1/(x-1)$, $x_0=2$, $x=1.9$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}\ ,\ \ f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}\ ,\ f'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}\ ,$$

$f(2) = 1$, $f'(2) = -1$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -6$ e

$$P_3(x) = 1 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 = -x^3 + 7x^2 - 17x + 15$$

quindi $P_3(1.9) = -1.9^3 + 7 \cdot 1.9^2 - 17 \cdot 1.9 + 15 \approx 1.111$

$f(x) = P_3(x) + o\left((x-2)^3\right)$ per $x \to 2$