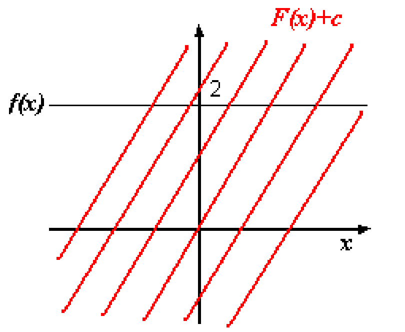
ESERCIZI 08 – Integrale indefinito

1) Data la funzione *f*, calcolare l'insieme delle primitive e disegnarne il grafico nell'insieme indicato.

1.a $f(x) = 2$ per $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int 2dx = 2x + c$$

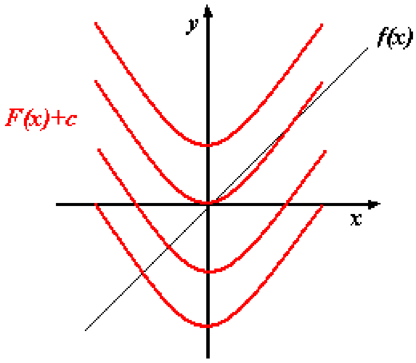
$$F(x) = 2x + c$$



1.b $f(x) = x$ per $x \in (-\infty, +\infty)$

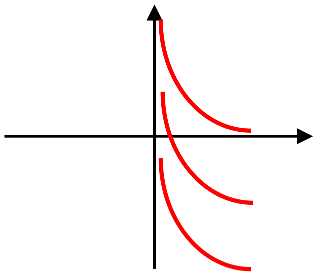
$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + c$$



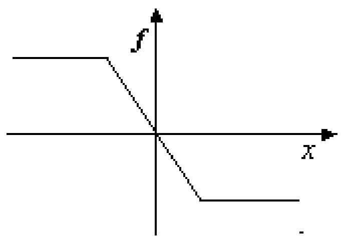
1.c $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ per $x \in (0, +\infty)$

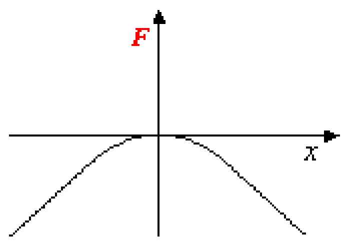
$$\int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + c$$



2) Tracciare i grafici delle primitive relative alle funzioni rappresentate dai grafici seguenti

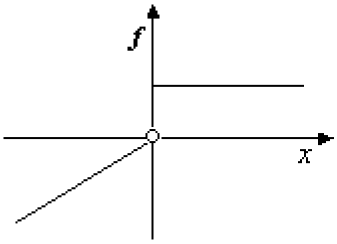
2.a

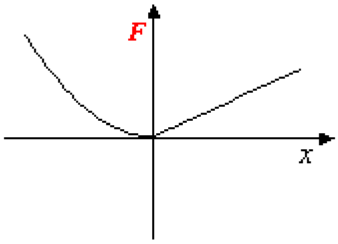




Si osservi che la funzione ***F(x)+c*** è derivabile per ogni *x* in quanto la funzione iniziale ***f*** (sua derivata) è continua.
Inoltre la ***F(x)+c*** ha un massimo in 0 dove la funzione ***f*** si annulla; infatti la ***f*** è negativa per $x>0$ e positiva per per $x<0$.

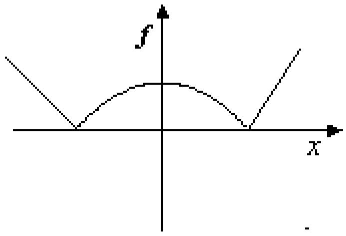
2.b

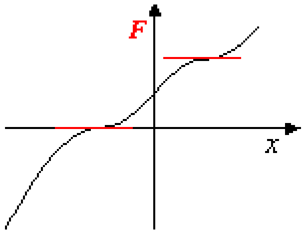




Si osservi che la funzione ***F*** è continua ma non derivabile in 0 perche' in 0 la ***f*** (sua derivata) non è continua. Inoltre la ***F*** è decrescente per $x<0$ e crescente per $x>0$.

2.c





Si osservi che la funzione ***F*** è derivabile per ogni *x* in quanto la funzione iniziale ***f*** (sua derivata) è continua.

Inoltre a ***F*** ha due flessi a tangente orizzontale in corrispondenza dei punti in cui la funzione ***f*** (sua derivata) si annulla; infatti la ***f*** è sempre non negativa

3) Data la famiglia delle primitive di $f(x)$ e fissato un punto *P* del piano, determinare la costante ***c*** per cui il grafico della primitiva passa per *P* e si stabilisca l'intervallo nel quale tale primitiva è definita.

Indicheremo con *G*(*x*,*c*) la famiglia delle primitive dipendente da *c*.

3.a Trovare il valore della costante per cui il grafico della primitiva di $f(x)=2x$ passa per il punto $P(0,0)$.

$$\int 2x dx = x^2 + c = G(x,c)$$

$$G(0,c) = 0 \Leftrightarrow 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$F(x) = x^2, x \in R$$

3.b Trovare il valore della costante per cui il grafico della primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ passa per il punto $P(0,1)$ o per il punto $P'(-2,1)$.

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + c = G(x,c)$$

$$G(0,c) = 1 \Leftrightarrow \ln|0+1| + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$F(x) = \ln(x+1), x \in (-1,+\infty)$$

$$G(-2,c) = 1 \Leftrightarrow \ln|-2+1| + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$F(x) = \ln(-x-1), x \in (-\infty,-1)$$

Osserva che $c=0$ in entrambe i casi ma le primitive sono diverse in quanto definite in intervalli diversi.

3.c Trovare il valore della costante per cui il grafico della primitiva di $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ passa per il punto $P(1,2)$.

$$\int -\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{x}+c=G(x,c)$$

$$G(1,c)=2 \Leftrightarrow -\frac{1}{1}+c=2 \Leftrightarrow c=1$$

$$F(x)=\frac{1}{x}+1, x\in R$$

4. Indicheremo con $G(x,c)$ la famiglia delle primitive al variare di $c \in R$.

a. $\int\left(x+2\sqrt{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx= \int x dx+2\int\sqrt{x}dx-\int\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{1}{2x^2}+c$

$G(1,c)=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+c=0\rightarrow c=-\frac{7}{3}$

$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{1}{2x^2}-\frac{7}{3}$ **C.E.: $x>0$**

b. $\int\frac{x^4-2x}{x^3}dx=\int\frac{x^3-2}{x^2}dx=\int x dx-2\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{x}+c$

$G(1,c)=\frac{1}{2}+2+c=0\rightarrow c=-\frac{5}{2}$

$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{x}-\frac{5}{2}$ **C.E.: $x>0$**

c. $\int\left(e^2+4^x+\frac{5}{x^4}\right)dx=\int e^2dx+\int 4^x dx+\int\frac{5}{x^4}dx=xe^2+\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{5}{3x^3}+c$

a. $G(1,c)=e^2+\frac{4}{\ln 4}-\frac{5}{3}+c=0\rightarrow c=-\left(e^2+\frac{4}{\ln 4}-\frac{5}{3}\right)$

b. $F(x)=xe^2+\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{5}{3x^3}-\left(e^2+\frac{4}{\ln 4}-\frac{5}{3}\right)$ **C.E.: $x>0$**

d. $\int\frac{3x^2+1}{1+x+x^3}dx=\ln\left|1+x+x^3\right|+c$

$G(1,c)=\ln 3+c=0\rightarrow c=-\ln 3$

a. $F(x)=\ln(x^3-x+1)-\ln 3$ **C.E.**: $x>\alpha$ dove $-1<\alpha<0$ è la soluzione dell'equazione $x^3+x+1=0 \Leftrightarrow x^3=-x-1$

e. $\int\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}dx=\ln\left|e^{2x}+x\right|+c$

a. $G(1,c)=\ln\left(e^2+1\right)+c=0\rightarrow c=-\ln\left(e^2+1\right)$

b. $F(x)=\ln(e^{2x}+x)-\ln\left(e^2+1\right)$ **C.E.**: $x>\alpha$ dove $-1<\alpha<0$ è la soluzione dell'equazione $e^{2x}+x=0 \Leftrightarrow e^{2x}=-x$

f. $\int\left[(2x-1)^3+2x-1\right]dx=\int(2x-1)^3\,dx+x^2-x$ con sostituzione: $t=2x-1\rightarrow dt=2dx$

a. $\frac{1}{2}\int t^3dt+x^2-x=\frac{1}{2}\int t^3dt+x^2-x=\frac{t^4}{8}+x^2-x+c=\frac{(2x-1)^4}{8}+x^2-x+c$

b. $G(1,c)=\frac{1}{8}+c=0\Rightarrow c=-\frac{1}{8}$

c. $F(x)=\frac{(2x-1)^4}{8}+x^2-x-\frac{1}{8}$ **C.E.: R**

g. $\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$ sostituzione: $t=1-x^2\rightarrow dt=-2xdx$

a. $-\int\sqrt{t}dt=-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+c$

b. $G(1,c)=c=0$

c. $F(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$ **C.E.:** $-1\le x\le 1$

h. $\int\frac{1}{\sqrt{3x+2}}dx=\frac{1}{3}\int 3(3x+2)^{-1/2}dx=\frac{2}{3}\sqrt{3x+2}+c$

a. $G(1,c)=\frac{2}{3}\sqrt{5}+c=0\rightarrow c=-\frac{2}{3}\sqrt{5}$

b. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+2}-\frac{2}{3}\sqrt{5}$ **C.E.:** $x>-\frac{2}{3}$

i. $\int\frac{x^3}{x^2+3x+2}dx=$ si esegue la divisione in modo da ottenere un quoziente e un resto:

$=\int(x-3)dx+\int\frac{(7x+6)}{x^2+3x+2}$

a. $\frac{7x+6}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+A+2B}{(x+2)(x+1)}\ \forall x\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=7\\A+2B=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=8\\B=-1\end{cases}$

b. $\int(x-3)dx+8\int\frac{1}{x+2}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}x^2-3x+8\ln|x+2|-\ln|x+1|+c=$

$=\frac{1}{2}x^2-3x+\ln\frac{(x+2)^8}{|x+1|}+c$

c. $G(1,c)=\frac{1}{2}-3+8\ln 3-\ln 2+c=0\rightarrow c=\frac{5}{2}-8\ln 3+\ln 2$

$F(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\ln\frac{(x+2)^8}{|x+1|}+\frac{5}{2}-8\ln 3+\ln 2$ **C.E.: *x*>-1**

j. $\int\frac{1}{2x^2+1}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{(\sqrt{2}x)^2+1}\cdot\sqrt{2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+c$

$G(1,c)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2})+c=0\rightarrow c=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2})$

a. $F(x)=\frac{1}{2}\arctan(\sqrt{2}x)-\frac{1}{2}\arctan(\sqrt{2})$ **C.E.: R**

k. $\int \frac{2x^2}{x^2-4x+4}dx =$ si esegue la divisione in modo da ottenere un quoziente e un resto:

$$\int 2dx + 8\int \frac{x-1}{x^2-4x+4} = 2x + 8\int \frac{x-2+1}{(x-2)^2}dx = 2x + 8\int \frac{1}{x-2}dx + 8\int \frac{1}{(x-2)^2}dx =$$

$$= 2x + 8\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + c$$

$$G(1,c) = 2 + 0 + 8 + c = 0 \rightarrow c = -10$$

$F(x) = 2x + 8\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} - 10$ **C.E.: *x*<2.**