

ESERCIZI 09 - Integrali definiti

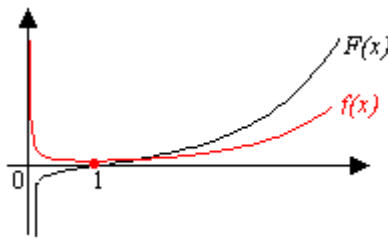
1) Studiare le seguenti funzioni integrali determinandone il campo di esistenza.

Per tutte le funzioni il grafico di $F(x)$ si può ricavare dal grafico di $f(x)$ facendo opportune considerazioni sul segno di $f(x)$ e sulla posizione dell'estremo fisso dell'integrale.

a) $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ è la funzione integrale dove la funzione integranda $f(x) = \frac{e^x}{x}$ è continua per $x \neq 0$ quindi è applicabile il teorema fondamentale del calcolo integrale per cui

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{x}$$

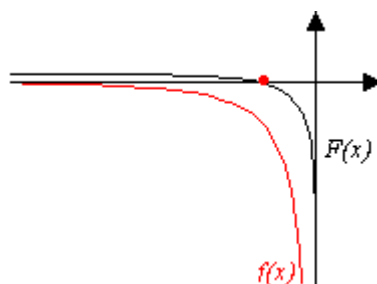
- C.E.: $(0, +\infty)$; infatti $(0, +\infty)$ è l'intervallo che contiene l'estremo fisso dell'integrale.
- $F(1) = 0$
- Segno: $f(x) = \frac{e^x}{x} > 0$ per ogni $x > 0$ quindi $F(x) > 0$ per ogni $x > 1$, $F(x) < 0$ per ogni $0 < x < 1$
- Per $x < 0$ $F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{x} > 0$ quindi $F(x)$ è strettamente crescente.
- $F''(x) = f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} > 0$ per $x > 1$ quindi $F(x)$ è strettamente convessa per $x > 1$ e strettamente concava altrove quindi $x = 1$ è punto di flesso a tangente obliqua.
- Il grafico



b) $F(x) = \int_{-1}^x \frac{e^t}{t} dt$ come per il punto a) grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale

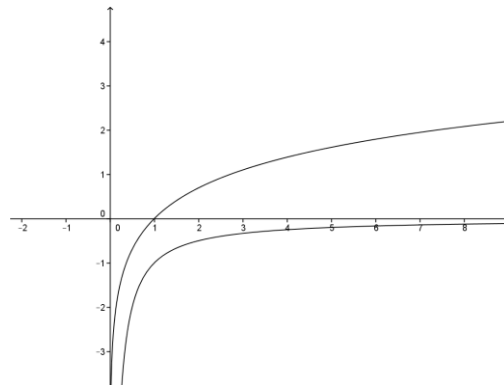
$$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{x}$$

- C.E.: $(-\infty, 0)$; infatti $(-\infty, 0)$ è l'intervallo che contiene l'estremo fisso dell'integrale.
- $F(-1) = 0$
- Segno: $f(x) < 0$ per ogni $x > 0$ quindi $F(x) > 0$ per ogni $x < -1$ e $F(x) < 0$ per ogni $-1 < x < 0$.
- Per $x < 0$ $F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{x} < 0$ quindi $F(x)$ è decrescente.
- Per $x < 0$ $F''(x) = f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} < 0$ quindi $F(x)$ è concava nel suo C.E.
- Il grafico

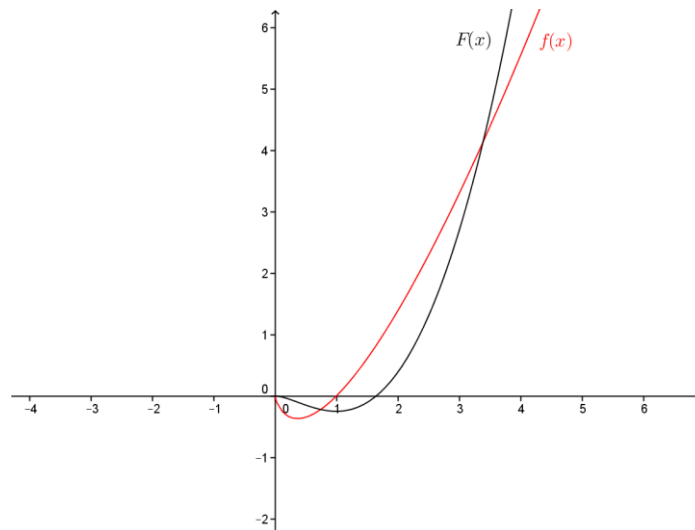


c) $F(x) = \int_1^x t \ln t dt$ è la funzione integrale dove la funzione integranda $f(x) = x \ln x$ è continua per $x > 0$ quindi è applicabile il teorema fondamentale per cui $F'(x) = f(x) = x \ln x$

- C.E.: $(0, +\infty)$; infatti $(0, +\infty)$ è l'intervallo che contiene l'estremo fisso dell'integrale e dove la funzione integranda è limitata.
- $F(1) = 0$
- Segno: si osserva che $f(x) = 0$ per $x = 1$, $f(x) > 0$ per $x > 1$ e $f(x) < 0$ per $0 < x < 1$; 1 è anche estremo fisso dell'integrale quindi $F(x) > 0$ per ogni $x > 1$, $F(x) < 0$ per ogni $0 < x < 1$.
- $F'(x) = x \ln x = 0$ per $x = 1$ che è punto di minimo locale; infatti $F'(x) < 0$ per $0 < x < 1$ quindi $F(x)$ è decrescente, $F'(x) > 0$ per $x > 1$ quindi $F(x)$ è crescente.
- $F''(x) = \ln x + \frac{1}{x} > 0$ per ogni valore di x ; infatti, come risulta dal confronto grafico delle funzioni $-\frac{1}{x}, \ln x$, si ha $\ln x > -\frac{1}{x}$. Quindi F è convessa per ogni $x > 0$ e non ha punti di flesso.



- Il grafico



2) Calcolare l'area delle regioni limitate comprese fra i grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$:

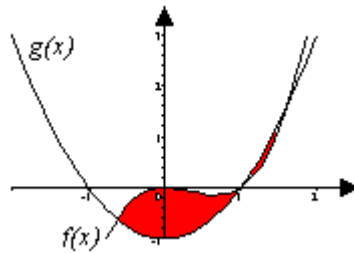
a) $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 0$

Il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x nei punti 0 e 1 e nell'intervallo $[0, 1]$ è negativa quindi

$$A = \int_0^1 |x^3 - x^2| dx = -\int_0^1 (x^3 - x^2) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b) $f(x) = x^3 - x^2, g(x) = x^2 - 1$

I grafici delle due funzioni si intersecano in tre punti $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e, come si vede dal grafico

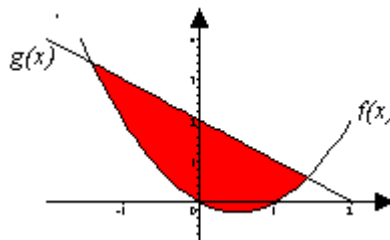


$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^1 [(x^3 - x^2) - (x^2 - 1)] dx + \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [-(x^3 - x^2) + (x^2 - 1)] dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + x \right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{13}{12}$$

c) $f(x) = 2 - x, g(x) = x^2 - x$

I grafici delle due funzioni si intersecano in due punti $\pm\sqrt{2}$ e, come si vede dal grafico



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [2 - x - (x^2 - x)] dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [2 - x^2] dx = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

3) Determinare il valor medio v_m delle seguenti funzioni nell'intervallo I segnato a fianco di ciascuna. Determinare inoltre se sono verificate le ipotesi del teorema della media integrale e, in caso affermativo, calcolare per quale valore c appartenente a I vale $v_m = f(c)$.

a) $f(x) = x^2 \quad I = [-1, 1]$

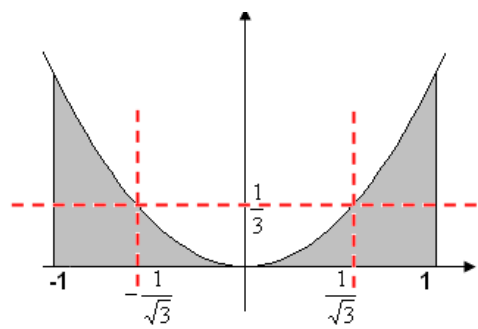
$f(x)$ è continua nell'intervallo I quindi integrabile in I ed inoltre esiste il valor medio v_m e un valore c appartenente ad I per il quale risulti $v_m = f(c)$.

$$v_m = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{2} = \frac{2 \int_0^1 x^2 dx}{2} = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$f(c) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Poiché $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \in [-1, 1]$ i valori in cui la funzione assume il valor medio sono due.

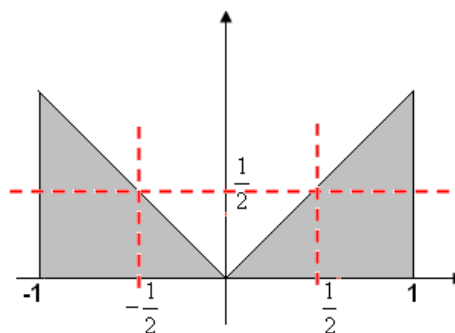
b) $f(x) = |x| \quad I = [-1, 1]$



$f(x)$ è continua nell'intervallo I quindi integrabile in I ed inoltre esiste il valor medio v_m e un valore c appartenente ad I per il quale risulti $v_m = f(c)$.

$$v_m = \frac{\int_{-1}^1 |x| dx}{2} = \frac{2 \int_0^1 x dx}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

L'integrale è stato calcolato come l'area di due triangoli di base 1 e altezza 1.



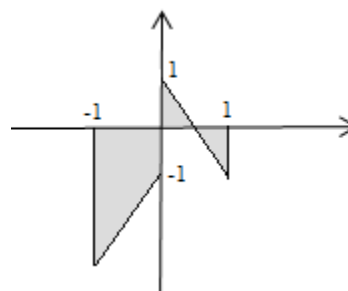
$$f(c) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{2}; c_2 = \frac{1}{2}$$

Poiché $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \in [-1, 1]$, anche in questo caso esistono due valori per i quali la funzione assume il valor medio.

c) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \leq 0 \\ 1-2x & x > 0 \end{cases} \quad I=[-1, 1]$

La funzione è continua a tratti e quindi integrabile in I . Non essendo però continua nell'intervallo I il valor medio esiste ma non possiamo essere certi dell'esistenza del valore c tale per cui risulti $v_m = f(c)$.

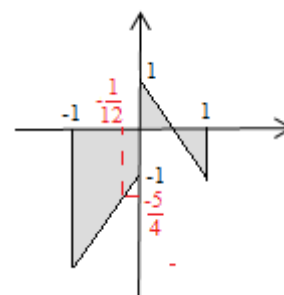
f è continua a tratti e quindi integrabile, ma questo non basta per assicurare che la funzione sia uguale al valore medio in un punto interno all'intervallo considerato. Poiché la continuità è condizione sufficiente ma non necessaria, è possibile che tale punto esista. Dal grafico si vede che il punto esiste.



$$v_m = \frac{\int_{-1}^0 (3x-1)dx + \int_0^1 (1-2x)dx}{2} = \frac{-\frac{(4+1) \cdot 1}{2} + 0}{2} = -\frac{5}{4}$$

Verifichiamo se esiste il punto c per il quale sia $v_m = f(c) = -\frac{5}{4}$

- Per $-1 \leq x \leq 0$ bisogna risolvere $3x-1 = -\frac{5}{4}$ quindi $c = -\frac{1}{12}$
- Per $0 \leq x \leq 1$ bisogna risolvere $1-2x = -\frac{5}{4}$ quindi $x = \frac{9}{8} \rightarrow x \notin I$



Esiste un solo valore di $c = -1/12$ appartenente a I per il quale la $f(x)$ assume il valor medio.

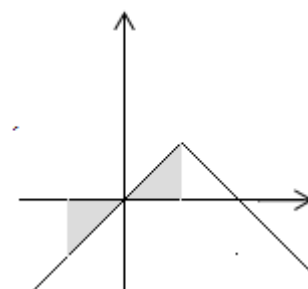
d) $f(x) = 1 - |1-x| \quad I=[-1, 1]$

La $f(x)$ può essere scritta come: $f(x) = \begin{cases} 1-(1-x) & x \leq 1 \\ 1-(x-1) & x > 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 2-x & x > 1 \end{cases}$

Nell'intervallo I la funzione è $f(x) = x$, continua e quindi integrabile in I . Inoltre esiste il valor medio v_m e almeno un valore c appartenente ad I per il quale risulti $v_m = f(c)$.

$f(x) = x$ è una funzione dispari e simmetrica rispetto l'origine quindi l'integrale vale 0 e pertanto vale 0 anche il valore medio: $v_m = 0$

Il valore cercato c è dato da: $f(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$.



e) $f(x) = 1 - |1 - x| \quad I = [0, 2]$

La $f(x)$ può essere scritta come: $f(x) = \begin{cases} 1 - (1 - x) & x \leq 1 \\ 1 - (x - 1) & x > 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$

Come si può notare dal grafico la funzione è continua nell'intervallo I quindi integrabile in I ed inoltre esiste il valor medio v_m e un valore c appartenente ad I per il quale risulti $v_m = f(c)$.

Calcoliamo l'integrale come somma delle aree dei due triangoli di base 1 e altezza 1:

$$v_m = \frac{\int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} = f(c)$$

Il valore c si calcola risolvendo due equazioni:

per $1 \leq x \leq 2 \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$

Per $0 \leq x \leq 1 \quad 2 - x = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}$.

