Esercitazione – Funzioni a più variabili

1. **Forme quadratiche**
2. **C.E e curve di livello e derivate direzionali**
3. **Derivate parziali, gradiente e approssimazione del primo ordine**
4. **Determinazione massimi e minimi non vincolati**

Esercizi punto 1

1. Determinare la matrice simmetrica associata alle forme quadratiche:

1.a $q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_2$ e stabilirne il segno usando il segno dei minori nord-ovest.

Soluzione

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix},\ 3 > 0, |A| = \frac{23}{4} > 0 \text{ quindi è definita positiva.}$$

1.b $q(x_1, x_2) = 2x_2^2 - x_1 x_2$ e stabilirne il segno usando il segno dei minori nord-ovest.

Soluzione

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix},\ |A| = -\frac{1}{4} < 0 \text{ quindi è indefinita.}$$

1.c $q(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - x_1 x_2$ e stabilirne il segno usando il segno dei minori nord-ovest.

Soluzione

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1/2 \\ -1/2 & -2 \end{bmatrix},\ -3 < 0, |A| = \frac{23}{4} > 0 \text{ quindi è definita negativa.}$$

1.d $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$ e stabilirne il segno usando il segno dei minori nord-ovest.

Soluzione

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ 1>0,\ |A| = 0 \text{ quindi è semidefinita positiva.}$$

1.f $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3$ e stabilirne il segno usando il segno dei minori nord-ovest.

Soluzione

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ |A| = 0 \text{ quindi la f.q. può essere semidefinita.}$$

I minori principali di ordine 1 sono: -2, -1, -1, quindi minori o uguali a 0.

I minori principali di ordine 2 sono:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \text{ positivi.}$$

q è semidefinita negativa.

2. Determinare il segno della forma quadratica associata alla matrice $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}$ usando il segno degli autovalori.

Soluzione
La matrice A è simmetrica e i minori di N-O sono tutti positivi quindi è definita positiva.

3. Date le matrici $A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&3\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ determinarne il segno

Soluzione
La matrice A non è simmetrica quindi per studiare il segno di $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x}$ bisogna studiare $q(\underline{x})=\underline{x}^T A'\underline{x}$ con $A'=\begin{bmatrix}-1&1\\1&3\end{bmatrix}$ i cui minori di N-O sono -1 , -4 quindi le forme quadratiche sono indefinite.
La matrice B è simmetrica e i minori di N-O sono 1 , -3 quindi la forma quadratica è indefinita.

4. Data la matrice $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\-1&1&1\\0&3&2\end{bmatrix}$ stabilire il segno della f.q. associata.

Soluzione
La matrice A non è simmetrica quindi per studiare il segno di $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x}$ bisogna studiare la matrice simmetrica $A'=\begin{bmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\1&1&2\\\frac{1}{2}&2&2\end{bmatrix}$ che genera la stessa f.q

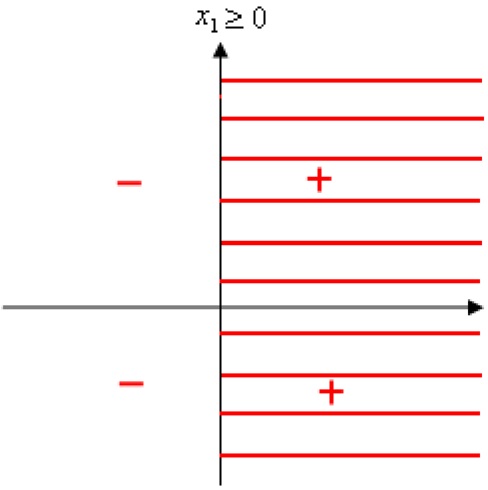
Il polinomio caratteristico di A' è di 3° quindi l'equazione per il calcolo degli autovalori non è risolvibile in modo elementare, in questo caso è preferibile calcolare i minori di N-O:
$a_{11}=1>0,\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\ |A'|=-\frac{9}{4}<0$ quindi la f.q.è indefinita.

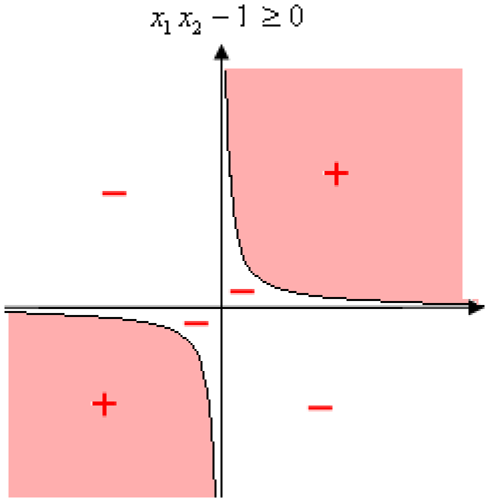
Esercizi punto 2

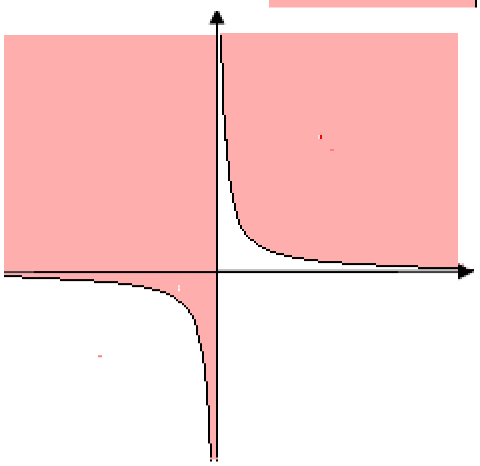
5. Data la funzione $f:R^2\to R$ tale che $f(\underline{x})=-2\sqrt{x_1\left(x_1x_2-1\right)}$ determinarne
   a. il campo di esistenza
   b. le curve di livello

Soluzione

a. $\quad x_1(x_1 x_2 - 1) \geq 0 \qquad$ Si studia il segno dei due fattori:



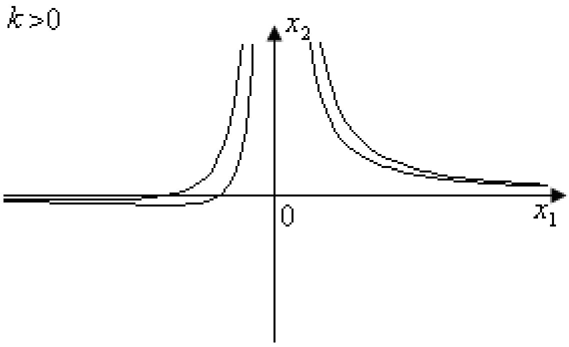


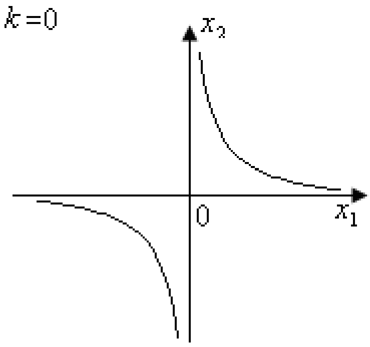


b. $\quad 2\sqrt{x_1(x_1 x_2 - 1)} = k,\ k \in R^+$

$$x_2 = \frac{k^2 + 4x_1}{4x_1^2},\ k \in R^+,$$

per k=0 la curva di livello è l'iperbole equilatera,





6. Data la funzione $f: R^2 \to R$ tale che $f(x_1, x_2) = \ln\left(\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} - 1\right)$ determinarne

a) il campo di esistenza
b) le curve di livello

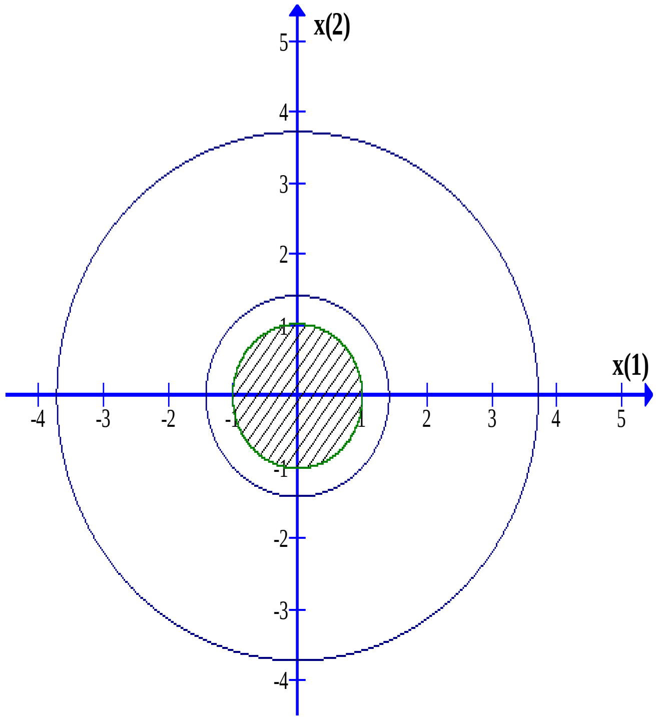
Soluzione

a) $C.E: \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} - 1 > 0 \qquad \to \qquad x_1^{\,2} + x_2^{\,2} > 1$

b) **Curve di livello**

$$\ln\left(\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} - 1\right) = k$$

$$\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} = e^k + 1 \qquad \to \qquad x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = \left(e^k + 1\right)^2 > 1$$



Esercizi punto 3

7) Data la funzione $f : R^3 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 - 2x_2x_3$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

a. calcolarne il gradiente nel punto $\underline{x}^0$

b. calcolarne la derivata direzionale delle seguenti funzioni nel punto $\underline{x}^0$ lungo la direzione $\underline{u}$.

c. dire se *f* è differenziabile in $\underline{x}^0$, calcolarne il differenziale

d. Scrivere le formule di Taylor del 1° ordine relativa al punto $\underline{x}^0$.

Soluzione

a. Il dominio è $D_f = R^3$

$$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_3 \quad \rightarrow \quad \nabla f(\underline{x}) = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla f(\underline{x}^0) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$f_3' = \frac{\partial f}{\partial x_3} = -2x_2$$

b. Il vettore $\underline{u}$ non ha norma unitaria quindi va normalizzato: $\underline{v} = \frac{u}{\|u\|} = \frac{u}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

poiché f è differenziabile , infatti le sue derivate parziali sono continue in $\underline{x}^0$ e poiché

$\nabla f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, la derivata direzionale è :

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}^0) = \left\langle \nabla f(\underline{x}^0), \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}} [0 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2+2) = 0$$

c. La funzione f è differenziabile in $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

il differenziale di f in $\underline{x}^0$ è:

$$df(\underline{x}^0) = \left\langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{dx} \right\rangle = 2[0 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = -2dx_2 + 2dx_3$$

d. Formule di Taylor del 1° ordine

Si è già calcolato $df(\underline{x}^0) = \left\langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{x} - \underline{x}^0 \right\rangle = -2x_2 + 2x_3 - 4$ quindi

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + df(\underline{x}^0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|) = -2x_2 + 2x_3 - 2 + o\left(\sqrt{x_1^2 + (x_2+1)^2 + (x_3-1)^2}\right)$$

Esercizi punto 4

9. Scrivere la formula di Taylor al **1°ordine** in un punto generico $\underline{x}$ della funzione

$f(\underline{x}) = \dfrac{x_1^2}{x_2} - \dfrac{x_2^2}{x_1} + x_3$, e calcolarne l'approssimazione in un punto $\underline{x}$ "vicino" a $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Soluzione

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{2x_1}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1^2} \\ -\dfrac{x_1^2}{x_2^2} - \dfrac{2x_2}{x_1} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow df(\underline{x}) = \left(\frac{2x_1}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}\right)dx_1 + \left(-\frac{x_1^2}{x_2^2} - \frac{2x_2}{x_1}\right)dx_2 + dx_3$$

È importante notare che la funzione $f(\underline{x})$ non ha punti critici, infatti la condizione $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$ non è mai verificata, poiché $f_3' = \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 1 \neq 0$.

$$\nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow df(\underline{x}^0) = 3(x_1 - 1) - 3(x_2 - 1) + (x_3 + 1) = 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 1$$

Per $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, poiché $f(\underline{x}^0) = -1$, la formula di Taylor al 1° ordine in $\underline{x}^0$ è:

$$\boxed{f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + df(\underline{x}^0) + o(\|\underline{h}\|) = 3x_1 - 3x_2 + x_3 + o(\|\underline{h}\|)}$$

L'approssimazione al primo ordine in un punto $\underline{x}$ "vicino" a $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è:

$$f(\underline{x}) \cong 3x_1 - 3x_2 + x_3$$

10. Determinare i punti di massimo, di minimo o di sella della seguente funzione utilizzando la C.S. del secondo ordine

a) $f(\underline{x}) = \dfrac{x_1^4}{4} + \dfrac{x_2^2}{2}$

Soluzione

$$\nabla f = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'hessiano è semidefinito positivo (è possibile verificarlo con i minori principali, non solo quelli di Nord-Ovest), quindi f è convessa e il punto $\underline{x} = \underline{0}$ è di minimo globale.

b) $f(\underline{x}) = x_1^2 x_2 - x_2^2 x_3 + x_3$

Soluzione

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 - 2x_2x_3 \\ -x_2^2 + 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 - 2x_2x_3 = 0 \\ x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = \pm 1 \end{cases}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 2x_1 & -2x_3 & -2x_2 \\ 0 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} H_f(0,1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ H_f(0,-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

In entrambe i punti (0,1,0) e (0,-1,0) l'hessiano è indefinito quindi sono punti di sella.

c) $f(\underline{x}) = \dfrac{x_1^2}{x_2} x_3, x_2 \neq 0$

Soluzione

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{2x_1}{x_2} x_3 \\ -\frac{x_1^2}{x_2^2} x_3 \\ \frac{x_1^2}{x_2} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$ quindi tutti i punti del piano $x_1 = 0$ sono stazionari e

$f(0, x_2, x_3) = 0$

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_2} x_3 & -\frac{2x_1}{x_2^2} x_3 & \frac{2x_1}{x_2} \\ -\frac{2x_1}{x_2^2} x_3 & \frac{2x_1^2}{x_2^3} x_3 & -\frac{x_1^2}{x_2^2} \\ \frac{2x_1}{x_2} & -\frac{x_1^2}{x_2^2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_2} \begin{bmatrix} 2x_3 & -\frac{2x_1}{x_2} x_3 & 2x_1 \\ -\frac{2x_1}{x_2} x_3 & \frac{2x_1^2}{x_2^2} x_3 & -\frac{x_1^2}{x_2} \\ 2x_1 & -\frac{x_1^2}{x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(0, x_2, x_3) = \frac{2x_3}{x_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Se $\frac{2x_3}{x_2} > 0$, ossia x_2, x_3 concordi, l'hessiano è semidef. positiva quindi la C.S. non è verificata, tuttavia si osserva che nei punti per cui $x_2, x_3 \neq 0$ sono concordi la funzione $f(\underline{x}) = \frac{x_1^2}{x_2} x_3$ è positiva quindi sono di minimo locale.
- Se $\frac{2x_3}{x_2} < 0$, ossia x_2, x_3 discordi, l'hessiano è semidef. negativa quindi la C.S. non è verificata, tuttavia si osserva che nei punti per cui $x_2, x_3 \neq 0$ sono discordi la funzione $f(\underline{x}) = \frac{x_1^2}{x_2} x_3$ è negativa quindi sono di massimo locale.