Esercizi 12 - Integrali indefiniti e problemi

1) Calcola i seguenti integrali indefiniti e per ognuno di essi la primitiva passante per il punto $P(1,0)$ indicandone il campo di esistenza.

a) $\int (x-3)e^{2x}dx = (x-3)\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = (x-3)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{7}{2}\right)+c$

$G(1,c) = -\frac{5}{4}e^2 + c = 0 \rightarrow c = \frac{5}{4}e^2$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{7}{2}\right)+\frac{5}{4}e^2$ **C.E.: R**

b) $\int 2(x-1)\ln x dx = (x-1)^2 \ln x - \int \frac{1}{x}(x-1)^2 dx = (x-1)^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + 2x + \ln x + c =$

$= x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + 2x - 2x\ln x + c$

$G(1,c) = 2 - \frac{1}{2} + c = 0 \rightarrow c = -\frac{3}{2}$

$F(x) = x^2 \ln x - 2x\ln x - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$ **C.E.: *x*>0**

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

$G(1,c) = -1 + c = 0 \rightarrow c = 1$

$F(x) = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + 1$ **C.E.: *x*>0**

d) $\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}e^x(x-1) + \int e^x dx - = -e^x + e^x\frac{1}{x} + e^x = e^x\frac{1}{x} + c$

$G(1,c) = e + c = 0 \rightarrow c = -e$

$F(x) = e^x\frac{1}{x} - e$ **C.E.: *x*>0**

2) La velocità di un punto materiale è $v(t) = 40t^{3/5}$ e lo spazio in t=0 è 75. Si trovi la funzione spazio $s(t)$.

Risposta

Sapendo che $v(t) = s'(t)$ si ottiene $s(t) = \int 40t^{3/5}dt = 40\frac{5}{8}t^{8/5} + c = 25t^{8/5} + c$

poiché $s(0) = 75$ si ha che $s(0) = c = 75$ quindi $s(t) = 25t^{8/5} + 75$.

3) Il costo marginale di un bene è $CM = \frac{dCT}{dq} = 25 + 30q - 9q^2$ dove $CT(q)$ è la funzione Costo totale. Sapendo che il costo fisso C_f è pari a 55, si trovi la funzione Costo totale $CT(q)$.

Risposta

Sapendo che $CM = \frac{dCT}{dq} = 25 + 30q - 9q^2$ si ottiene

$CT(q) = \int (25 + 30q - 9q^2)dq = 25q + 15q^2 - 3q^3 + c$,

poiché $CT(0) = C_f = 55 = c$ si ha che $CT(q) = 25q + 15q^2 - 3q^3 + 55$

4) Essendo $C = C(Y)$ il consumo in funzione del reddito Y, la propensione marginale al consumo è data da $PMC = \frac{dC}{dY} = C'(Y)$. Se $PMC = 0.6 + \frac{0.1}{\sqrt[3]{Y}}$ e, quando il reddito è nullo, il consumo è uguale a 45, si trovi la funzione consumo $C(Y)$.

Risposta

Sapendo che $PMC = \frac{dC}{dY} = C'(Y)$ si ottiene

$$C(Y) = \int \left(0.6 + \frac{0.1}{\sqrt[3]{Y}}\right) dY = 0.6Y + \frac{0.3}{2}\sqrt[3]{Y^2} + c$$

poiché $C(0) = 45 = c$ si ha che $C(Y) = 0.6Y + \frac{0.3}{2}\sqrt[3]{Y^2} + 45$.

5) Essendo $S = S(Y)$ il risparmio in funzione del reddito, la propensione marginale al risparmio è data da $PMS = \frac{dS}{dY}$. Se $PMS = 0.5 + 0.2e^{-\frac{Y-2}{2}}$ e quando il reddito è uguale a 25 si ha un risparmio nullo, si trovi la funzione del risparmio $S(Y)$.

Risposta

Sapendo che $PMS = \frac{dS}{dY}$ si ha che $S(Y) = \int 0.5 + 0.2e^{-\frac{Y-2}{2}}\, dY = 0.5Y - 0.4e^{-\frac{Y-2}{2}} + c$

poiché $S(25) = 1.25 - 0.4e^{-\frac{23}{2}} + c = 0$ allora $c = 0.4e^{-\frac{23}{2}} - 12.5$.