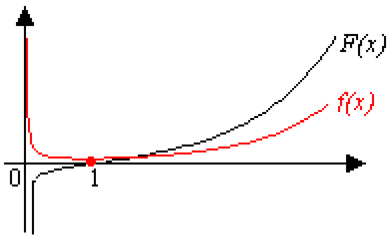
Esercizi su integrali definiti

1) Studiare le seguenti funzioni integrali determinandone il campo di esistenza.

Per tutte le funzioni il grafico di $F(x)$ si può ricavare dal grafico di $f(x)$ facendo opportune considerazioni sul segno di $f(x)$ e sulla posizione dell'estremo fisso dell'integrale.

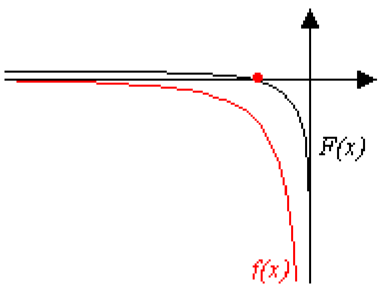
a) $F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ è la funzione integrale dove la funzione integranda $f(x)=\frac{e^x}{x}$ è continua per $x \neq 0$ quindi è applicabile il teorema per cui $F'(x)=f(x)=\frac{e^x}{x}$

- C.E.: $(0,+\infty)$; infatti $(0,+\infty)$ è l'intervallo che contiene l'estremo fisso dell'integrale e dove la funzione integranda è limitata.
- $F(1)=0$
- Segno: $f(x)=\frac{e^x}{x}>0$ per ogni $x>0$ quindi $F(x)>0$ per ogni $x>1$, $F(x)<0$ per ogni $0<x<1$
- Per $x<0$ $F'(x)=f(x)=\frac{e^x}{x}>0$ quindi $F(x)$ è crescente.
- $F''(x)=f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0$ per $x>1$ quindi $F(x)$ è convessa per $x>1$ e concava altrove quindi $x = 1$ è punto di flesso a tangente obliqua .
- Il grafico



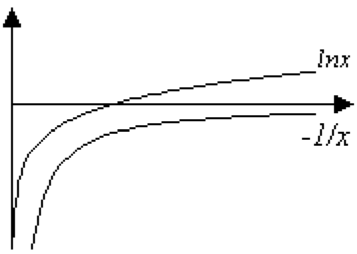
b) $F(x)=\int_{-1}^x \frac{e^t}{t}dt$ come per il punto a) $F'(x)=f(x)=\frac{e^x}{x}$

- C.E.: $(-\infty,0)$; infatti $(-\infty,0)$ è l'intervallo che contiene l'estremo fisso dell'integrale e dove la funzione integranda è limitata.
- $F(-1)=0$
- Segno: $f(x)<0$ per ogni $x>0$ quindi $F(x)>0$ per ogni $x<-1$ e $F(x)<0$ per ogni $-1<x<0$.
- Per $x<0$ $F'(x)=f(x)=\frac{e^x}{x}<0$ quindi $F(x)$ è decrescente.
- Per $x<0$ $F''(x)=f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}<0$ quindi $F(x)$ è concava nel su C.E.
- Il grafico

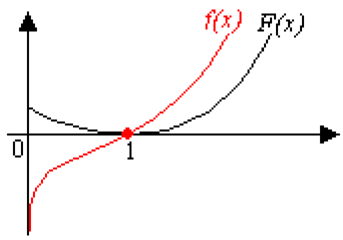


c) $F(x)=\int_1^x e^t \ln t dt$ è la funzione integrale dove la funzione integranda $f(x)=e^x \ln x$ è continua per $x>0$ quindi è applicabile il teorema per cui $F'(x)=f(x)=e^x \ln x$

- C.E.: (0,+∞); infatti (0,+∞) è l'intervallo che contiene l'estremo fisso dell'integrale e dove la funzione integranda è limitata.
- *F*(1)=0
- Segno: si osserva che *f*(*x*)=0 per $x=1$, *f*(*x*)>0 per $x>1$ e *f*(*x*)<0 per $0<x<1$; 1 è anche estremo fisso dell'integrale quindi
  F(*x*)>0 per ogni $x>1$, *F*(*x*)<0 per ogni $0<x<1$.
- $F'(x)=e^x \ln x=0$ per $x=1$ che è punto di minimo locale; infatti
  $F'(x)<0$ per $0<x<1$ quindi *F*(*x*) è decrescente,
  $F'(x)>0$ per $x>1$ quindi *F*(*x*) è crescente.
- $F''(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)>0$ per ogni valore di *x*; infatti, come risulta dal confronto grafico delle funzioni $-\frac{1}{x}, \ln x$, si ha $\ln x>-\frac{1}{x}$. Quindi *F* è convessa per ogni *x*>0 e non ha punti di flesso.



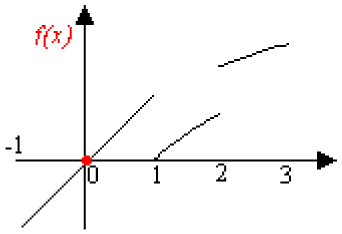
- Il grafico

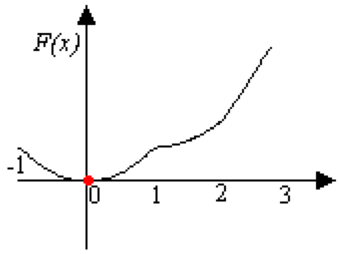


d)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 2\le x\le 3\\ \ln x & 1\le x<2\\ x & -1\le x<1\end{cases}, \quad F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

Tenendo conto che *F*(*x*) è sempre continua, i grafici di *f* e di *F* sono i seguenti





Poiché *f*(*x*) è continua, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale nei singoli intervalli, si ha la forma analitica di *F*(*x*).

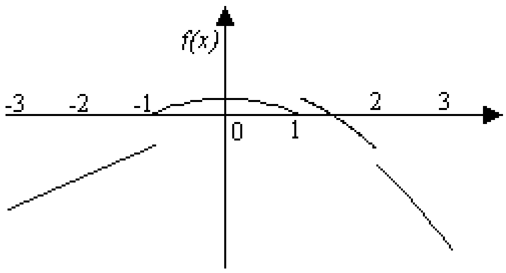
$$F(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^x & -1\le x<1\\ \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1+\left[t(\ln t-1)\right]_1^x & 1\le x<2\\ \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1+\left[t(\ln t-1)\right]_1^2+\left[\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_2^x & 2\le x\le 3\end{cases}$$

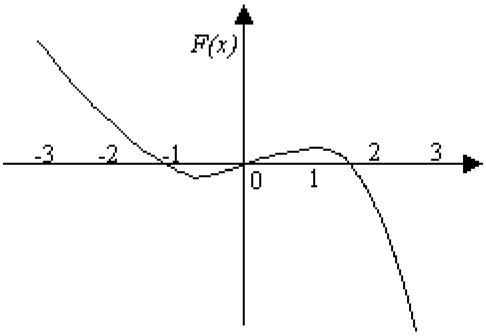
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & -1\le x\le 1\\ \dfrac{3}{2}+x(\ln x+1) & 1\le x\le 2\\ -\dfrac{1}{2}+2\ln 2+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-\dfrac{4}{3}\sqrt{2} & 2\le x\le 3\end{cases}$$

e)

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & -1\le x\le 1\vee 2\le x\le 3\\ -x^2+2 & 1<x<2\\ x & -3\le x<-1\end{cases}\quad,\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

Si tenga inoltre conto che F(x) è sempre continua.





Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale nei singoli intervalli si ha la forma analitica di $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}\left[-\dfrac{t^3}{3}+x\right]_0^x=-\dfrac{x^3}{3}+x & -1\le x\le 1\\ \left[-\dfrac{t^3}{3}+t\right]_0^1+\left[-\dfrac{t^3}{3}+2t\right]_1^x=-\dfrac{x^3}{3}+2x-1 & 1\le x\le 2\\ \left[-\dfrac{t^3}{3}+t\right]_0^1+\left[-\dfrac{t^3}{3}+2t\right]_1^2+\left[-\dfrac{t^3}{3}+t\right]_2^x=1-\dfrac{x^3}{3}+x & 2\le x\le 3\\ \left[-\dfrac{t^3}{3}+t\right]_0^{-1}+\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_{-1}^x=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{7}{6}+\dfrac{x^2}{2} & -3\le x\le -1\end{cases}$$

2) Calcolare l'area delle regioni limitate comprese fra i grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$:

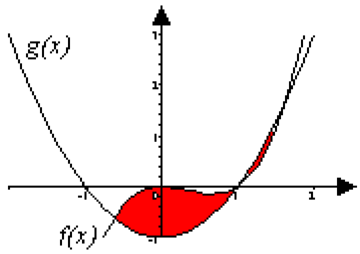
a) $f(x)=x^3-x^2, g(x)=0$

Il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x nei punti 0 e 1 e nell'intervallo [0,1] è negativa quindi

$$A=\int_0^1\left|x^3-x^2\right|dx=-\int_0^1\left(x^3-x^2\right)dx=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

b) $f(x)=x^3-x^2, g(x)=x^2-1$

I grafici delle due funzioni si intersecano in tre punti $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e , come si vede dal grafico

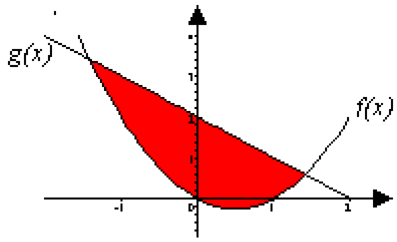


$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{1} [(x^3 - x^2) - (x^2 - 1)]dx + \int_{1}^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} [-(x^3 - x^2) + (x^2 - 1)]dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + x \right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{1} + \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - x \right]_{1}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{13}{12}$$

d) $f(x) = 2 - x, g(x) = x^2 - x$

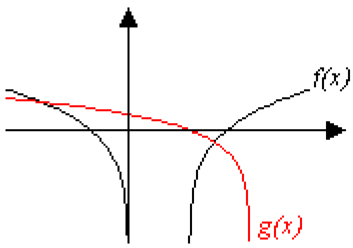
I grafici delle due funzioni si intersecano in due punti $\pm\sqrt{2}$ e , come si vede dal grafico



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [2 - x - (x^2 - x)]dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [2 - x^2]dx = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

e) $f(x) = \ln(2 - x), g(x) = \ln(x^2 - x)$

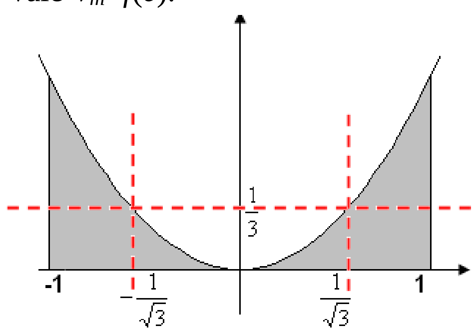
Come si deduce dal grafico delle due funzioni, non esiste una regione limitata compresa, quindi l’area non esiste.



3) Determinare il valor medio v_m delle seguenti funzioni nell'intervallo I segnato a fianco di ciascuna. Determinare inoltre se sono verificate le ipotesi del teorema della media integrale e, in caso affermativo, calcolare per quale valore c appartenente a I vale $v_m = f(c)$.

a) $f(x) = x^2$ $I=[-1,1]$

f(x) è continua nell’intervallo *I* quindi integrabile in *I* ed inoltre esiste il valor medio v_m e un valore *c* appartenente ad *I* per il quale risulti $v_m = f(c)$.



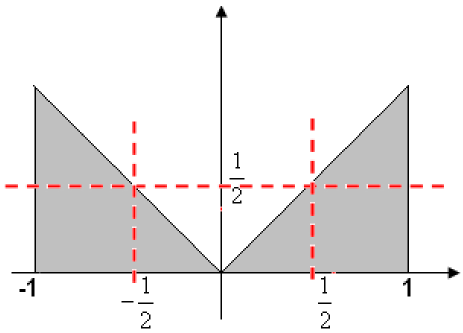
$$v_m = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{2} = \frac{2\int_{0}^{1} x^2 dx}{2} = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ .$$

$$f(c)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow c_1=-\frac{1}{\sqrt{3}};c_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Poiché $-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\in[-1,1]$ i valori in cui la funzione assume il valor medio sono due.

b) $f(x)=|x|$ $\quad I=[-1,1]$

f(x) è continua nell'intervallo *I* quindi integrabile in *I* ed inoltre esiste il valor medio v_m e un valore *c* appartenente ad *I* per il quale risulti $v_m=f(c)$.



$$v_m=\frac{\int_{-1}^{1}|x|\,dx}{2}=\frac{2\int_{0}^{1}x\,dx}{2}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

L'integrale è stato calcolato come l'area di due triangoli di base 1 e altezza 1.

$$f(c)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow|x|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow c_1=-\frac{1}{2};c_2=\frac{1}{2}$$

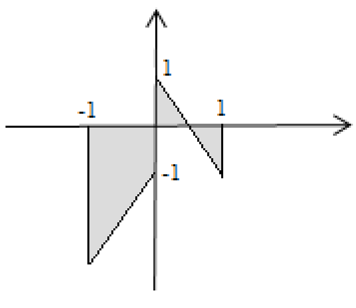
Poiché $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\in[-1,1]$, anche in questo caso esistono due valori per i quali la funzione assume il valor medio.

c) $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\le 0\\ 1-2x & x>0\end{cases}$ $\quad I=[-1,1]$

La funzione è continua a tratti e quindi integrabile in I. Non essendo però continua nell'intervallo *I* il valor medio esiste ma non possiamo essere certi dell'esistenza del valore *c* tale per cui risulti $v_m=f(c)$.

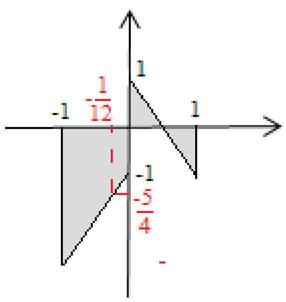
f è continua a tratti e quindi integrabile, ma questo non basta per assicurare che la funzione sia uguale al valore medio in un punto interno all'intervallo considerato. Poiché la continuità è condizione sufficiente ma non necessaria, è possibile che tale punto esista.

Dal grafico si vede che il punto esiste.



$$v_m=\frac{\int_{-1}^{0}(3x-1)dx+\int_{0}^{1}(1-2x)dx}{2}=\frac{-\frac{(4+1)\cdot 1}{2}+0}{2}=-\frac{5}{4}$$

Verifichiamo se esiste il punto *c* per il quale sia $v_m=f(c)=-\frac{5}{4}$



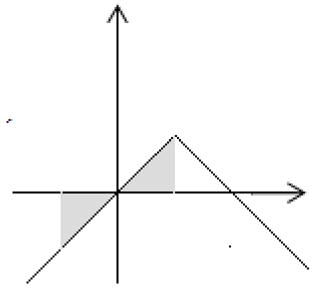
- Per $-1\le x\le 0$ bisogna risolvere $3x-1=-\frac{5}{4}$ quindi $c=-\frac{1}{12}$
- Per $0\le x\le 1$ bisogna risolvere $1-2x=-\frac{5}{4}$ quind $x=\frac{9}{8}\rightarrow x\notin I$

Esiste un solo valore di *c*=-1/12 appartenente a *I* per il quale la *f(x)* assume il valor medio.

d) $f(x)=1-|1-x|$ $\quad I=[-1,1]$

La *f(x)* può essere scritta come: $f(x)=\begin{cases}1-(1-x) & x\le 1\\ 1-(x-1) & x>1\end{cases}\rightarrow f(x)=\begin{cases}x & x\le 1\\ 2-x & x>1\end{cases}$.

Nell'intervallo I la funzione è $f(x) = x$, continua e quindi integrabile in I. Inoltre esiste il valor medio v_m e almeno un valore c appartenente ad I per il quale risulti $v_m = f(c)$.



$f(x) = x$ è una funzione dispari e simmetrica rispetto l'origine quindi l'integrale vale 0 e pertanto vale 0 anche il valore medio: $v_m = 0$

Il valore cercato c è dato da: $f(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

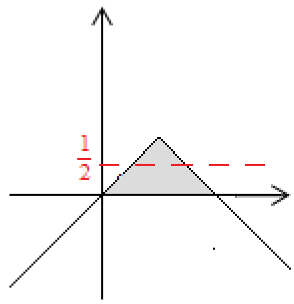
e) $f(x) = 1 - |1 - x|$ $\quad I=[0,2]$

La $f(x)$ può essere scritta come: $f(x) = \begin{cases} 1-(1-x) & x \le 1 \\ 1-(x-1) & x > 1 \end{cases} \to f(x) = \begin{cases} x & x \le 1 \\ 2-x & x > 1 \end{cases}$

Come si può notare dal grafico la funzione è continua nell'intervallo I quindi integrabile in I ed inoltre esiste il valor medio v_m e un valore c appartenente ad I per il quale risulti $v_m = f(c)$.

Calcoliamo l'integrale come somma delle aree dei due triangoli di base 1 e altezza 1:

$$v_m = \frac{\int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} = f(c)$$



Il valore c si calcola risolvendo due equazioni:

per $1 \le x \le 2$ $\quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$

Per $0 \le x \le 1$ $\quad 2 - x = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}$.