Esercizi 15 – Matrici, determinanti, inversa

1. Esegui la combinazione lineare $aA+bB$ nei seguenti casi:

a. $A=\begin{bmatrix}4 & -3 & 6\\ 7 & 1 & 3\sqrt{2}\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}0 & 5 & -7\\ 1 & -1 & 0\\ e & -2 & 3\end{bmatrix}; a=1; b=1$

Soluzione: $A+B=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 8 & 0 & 3\sqrt{2}\\ 2+e & -1 & 3\end{bmatrix}$

b. $A=B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}, a=-1; b=2$

Soluzione: $-A+2B=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}=A$

c. $A=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}, a=2; b=\frac{1}{2}$

Soluzione:

$$2A+\frac{1}{2}B=2\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -\frac{3}{2}\\ \frac{9}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}12\\ -3\\ 9\end{bmatrix}$$

d. $A=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}, a, b$ qualsiasi

Soluzione:

$$aA+bB=a\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+4b\\ -a+b\\ 3a-3b\end{bmatrix}$$

2. Dopo aver stabilito se *A* e *B* sono conformabili, esegui, se possibile, il prodotto *AB*:

Soluzione

a. A e B sono conformabili e $AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 5\\ 14 & 2\end{bmatrix}$

b. A e B sono conformabili e $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 28 & 17 & 31 \\ 29 & 18 & 27 \end{bmatrix}$

c. A e B non sono conformabili; infatti $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ha dimensione 2×3 e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ha dimensione 2×4, il numero di colonne di A è diverso dal numero di righe di B.

d. A e B sono conformabili e $AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 27 & 38 \end{bmatrix}$

3. Stabilisci se le seguenti matrici sono singolari

Soluzione

a. A è singolare; infatti $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (le righe e le colonne sono proporzionali)

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

c. A non è singolare; infatti $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (le righe e le colonne sono linearmente indipendenti)

d. A non è singolare; infatti $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$ (le righe e le colonne sono linearmente indipendenti)