Esercizi 16 – Spazi vettoriali e rango

1. Stabilisci il rango delle seguenti matrici

Soluzione:

a. $rg(A) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\right) = 1$; infatti, poiché *A* non è la matrice nulla $rg(A) \geq 1$ e det*A*=0

b. $rg(B) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1$; infatti, poiché *B* non è la matrice nulla $rg(B) \geq 1$ e

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

c. $rg(C) = rg\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2$; infatti, poiché *C* non è la matrice nulla $rg(C) \geq 1$ e $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

d. $rg(D) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3$; infatti det(*D*)=-25≠0.

2. Stabilire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Soluzione

a. I vettori $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti poiché rg(*A*)= 1 dove la matrice; infatti $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ non è la matrice nulla quindi il rango è almeno 1 ma non può essere 2 poiché l'unico minore di ordine 2 è det*A*=0.

b. I vettori $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti; infatti sono tre vettori di R^2 e il numero massimo di vettori di R^2 linearmente indipendenti è 2. Si osserva che $rg\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}\right) = 2$ quindi i vettori linearmente indipendenti sono 2; in particolare sono linearmente indipendenti le coppie di vettori *a* e *b* $\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 11 \neq 0\right)$, *a* e *c* $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0\right)$, *c* e *b* $\left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -14 \neq 0\right)$.

c. I vettori $a = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti; infatti dalla matrice

$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ è possibile estrarre un minore non nullo di ordine 3 che, essendo *A* una matrice quadrata, coincide con det*A*=-11≠0.

3. Dati i seguenti insiemi di vettori, stabilire la dimensione del sottospazio lineare generato e dire se sono basi di tale sottospazio.

Soluzione

a. $a=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$ costituiscono una base di R^2; infatti $rg\left(\begin{bmatrix}3 & 7\\-2 & 5\end{bmatrix}\right)=2$ quindi sono due vettori linearmente indipendenti di R^2 che è spazio vettoriale di dimensione 2.

b. $a=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}4\\6\\-2\end{bmatrix}$ e $c=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ non costituiscono una base; infatti, essendo b=2a, i vettori a e b sono linearmente dipendenti. Si osserva che, poiché $rg\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 6\\-1 & -2\end{bmatrix}\right)=2$, i vettori a e c sono linearmente indipendenti, i tre vettori generano un sottospazio di dimensione 2 una cui base è costituita dai vettori a e c. La stessa cosa si può dire considerando i vettori b e c; infatti $rg\left(\begin{bmatrix}4 & 1\\6 & 6\\-2 & -2\end{bmatrix}\right)=2$.