Esercizi Funzioni a più variabili

1. Classificare le seguenti forme quadratiche determinando se sono definite o semidefinite o indefinite.

   a. $q(\underline{x}) = \underline{x}^T A\underline{x},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

   Risposta

   La matrice A è reale e simmetrica, si considerano i minori principali di N-O:

   $a_{11} = 1 > 0$

   $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$

   $|A| = 11 > 0$

   Concludendo: la forma quadratica è definita positiva.

   b. $q(\underline{x}) = \underline{x}^T A\underline{x},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   Risposta

   La matrice A è reale e simmetrica, si considerano i minori principali di N-O:

   $a_{11} = 1 > 0$

   $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 < 0$

   Concludendo: la forma quadratica è indefinita.

   c. Come a.

   d. $q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2,\ \underline{x} \in R^3$

   Risposta

   $q(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

   La matrice A è reale e simmetrica, si considerano i minori principali di N-O:

   $a_{11} = 1 > 0.\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ |A| = -4 < 0$ quindi la forma quadratica è indefinita.

   e. $q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2,\ \underline{x} \in R^3$

   Risposta

   $q(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

La matrice A è reale e simmetrica, si considerano i minori principali di N-O:

$a_{11}=1>0. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1>0, |A|=-4<0$ quindi la forma quadratica è indefinita.

f. $q(\underline{x})=-x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2-2x_2x_3-x^3$, $\underline{x}\in R^3$

Risposta

$$q(\underline{x})=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

La matrice A è reale e simmetrica e poiché $|A|=0$, si devono considerare tutti i minori principali:

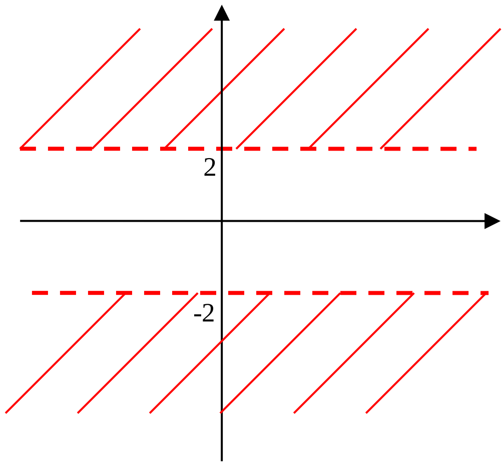
$a_{11}=1<0, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1>0, \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1>0, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1>0$ quindi la forma quadratica è semidefinita negativa.

2. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

a.

$f(\underline{x})=\ln\left(x_2^{\,2}-4\right)$, $\underline{x}\in R^2$

$x_2^{\,2}-4>0 \Leftrightarrow (x_2-2)(x_2+2)>0$

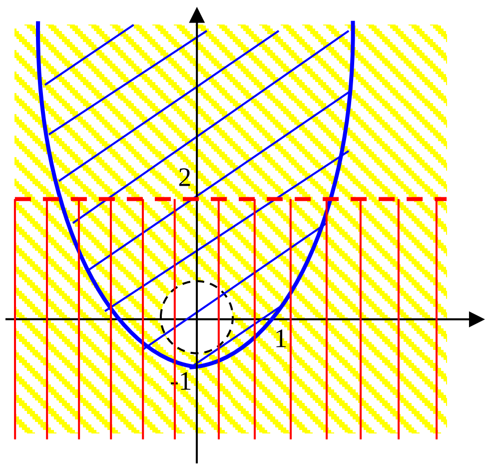


b.

$$f(\underline{x})=\frac{\sqrt{x_2-x_1^{\,2}+1}}{\sqrt{2-x_2}}+\ln\left(4\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\right)-1\right),\ \underline{x}\in R^2$$

$$\begin{cases} x_2-x_1^{\,2}+1\geq 0 \\ 2-x_2>0 \\ 4\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\right)-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2\geq x_1^{\,2}-1 \\ x_2<2 \\ x_1^{\,2}+x_2^{\,2}>\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il campo di esistenza è dato dall'intesezione delle regioni che soddisfano le tre disequazioni, rappresentate rispettivamente in blu, rosso e giallo.



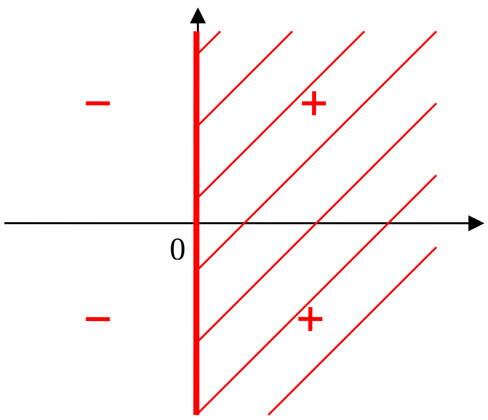
c.

$$f(\underline{x}) = \sqrt{x_1(x_2 + x_1)},\ \underline{x} \in R^2$$

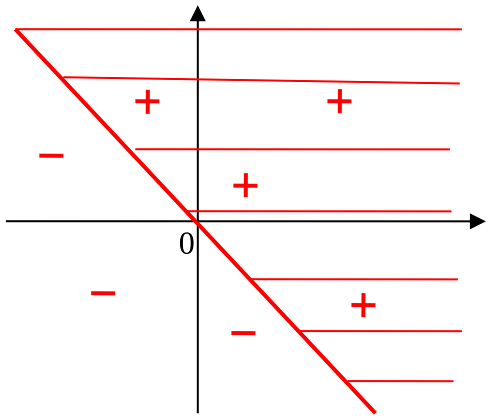
$$x_1(x_2 + x_1) \geq 0$$

Nel grafico si riportano i segni dei due fattori:

$x_1 \geq 0$

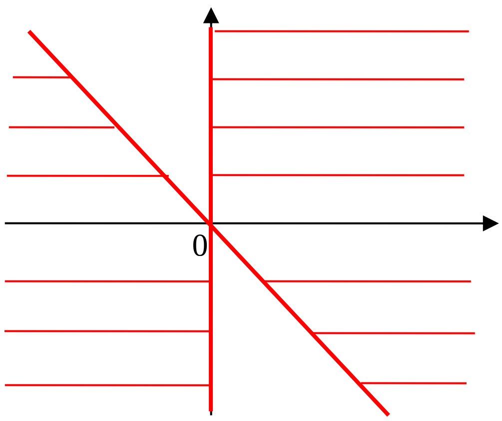


$x_2 \geq -x_1$



Il grafico del campo di esistenza è:

$x_1(x_2 + x_1) \geq 0$

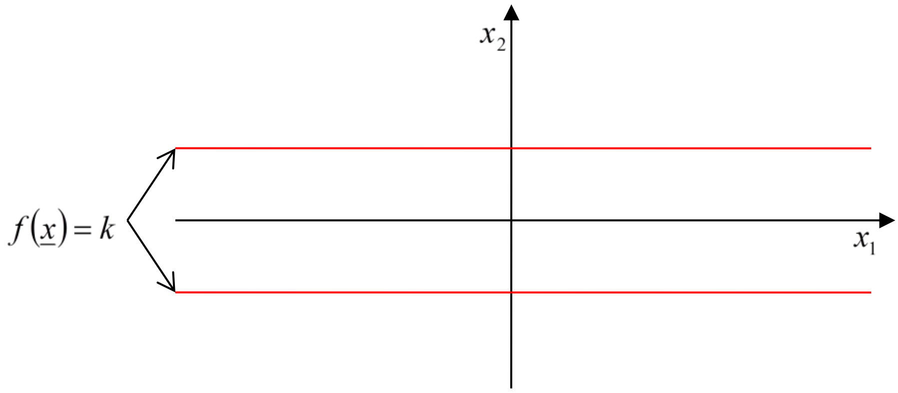


3. Determinare le curve di livello delle seguenti funzioni disegnandole nel piano (x_1, x_2)

a. $f(\underline{x}) = \ln(x_2^{\ 2} - 4),\ \underline{x} \in R^2$

$\ln(x_2^{\ 2} - 4) = k,\ k \in R$

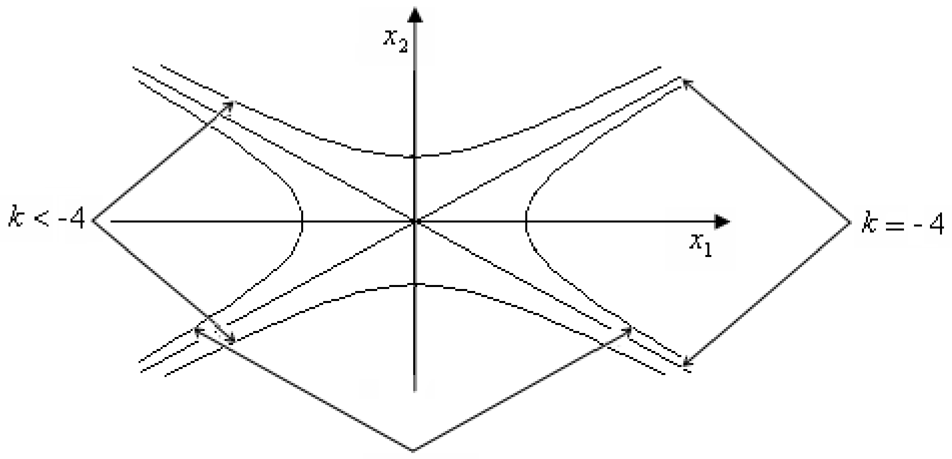
$x_2^{\ 2} - 4 = e^k \Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{e^k + 4},\ k \in R$



b. $f(\underline{x}) = x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - 4,\ \underline{x} \in R^2$

$x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - 4 = k,\ k \in R$

$x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} = 4 + k$



c. $f(\underline{x}) = x_1^{\ 2} + 2x_1 + x_2^{\ 2},\ \underline{x} \in R^2$

$x_1^{\ 2} + 2x_1 + x_2^{\ 2} = k,\ k \in R$

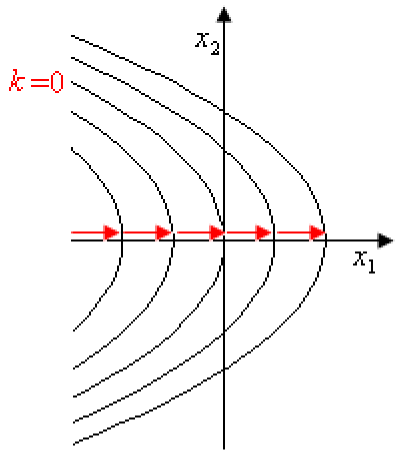
$(x_1 + 1)^2 + x_2^{\ 2} = k + 1$

si tratta di circonferenze di centro (-1,0) e raggio $\sqrt{k+1}$ per $k \geq -1$

d. $f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2^{\,2}$, $\underline{x} \in R^2$

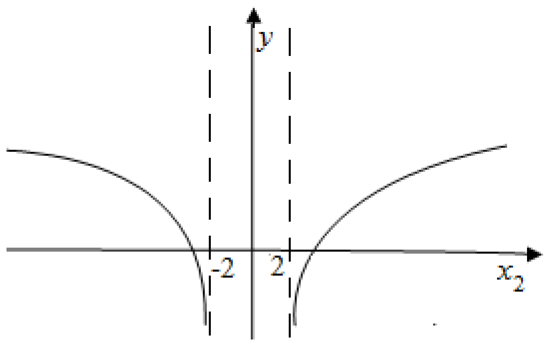
$2x_1 + x_2^{\,2} = k$, $k \in R$

$x_1 = \frac{1}{2}\left(k - x_2^{\,2}\right)$

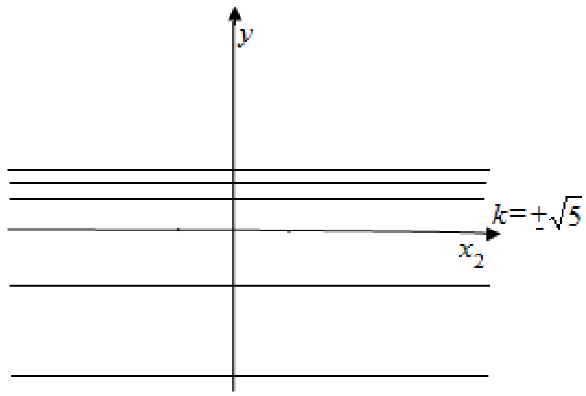


4. Per le funzioni dell'es.4 determinare nel piano (x_1, y) le curve ottenute ponendo $x_2 = k$ e nel piano (x_2, y) le curve ottenute ponendo $x_1 = k$.

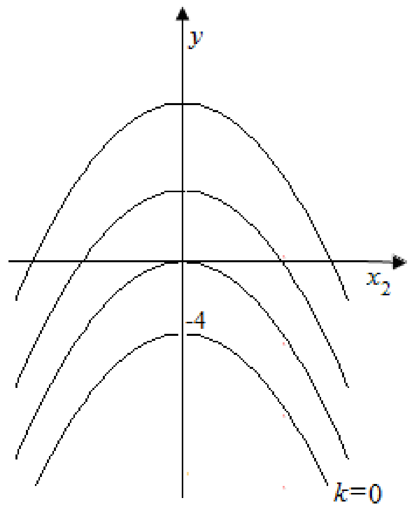
a. Ponendo x_1=k in $f(\underline{x}) = \ln\left(x_2^{\,2} - 4\right)$, si ottiene $y = \ln\left(x_2^{\,2} - 4\right)$, $x < -2 \vee x > 2$.



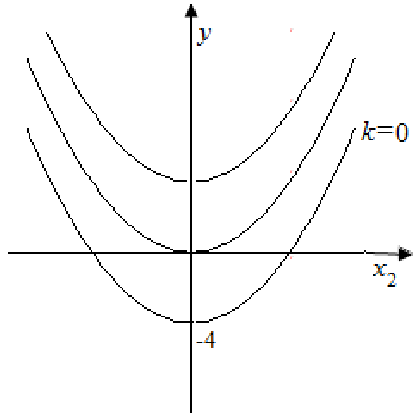
Ponendo x_2=k in $f(\underline{x}) = \ln\left(x_2^{\,2} - 4\right)$, si ottiene $y = \ln\left(k^2 - 4\right) = c \in R$, $k < -2 \vee k > 2$.



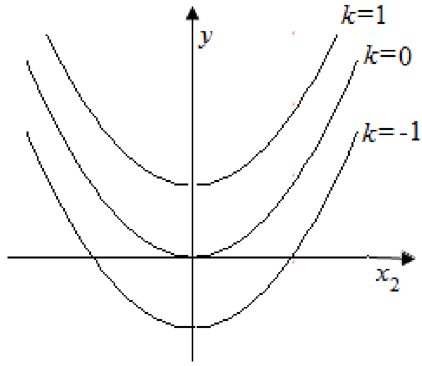
b. Ponendo x_1=k in $f(\underline{x}) = x_1^{\,2} - x_2^{\,2} - 4$, si ottiene $y = -x_2^{\,2} - 4 + k^2$, $\underline{x} \in R$.



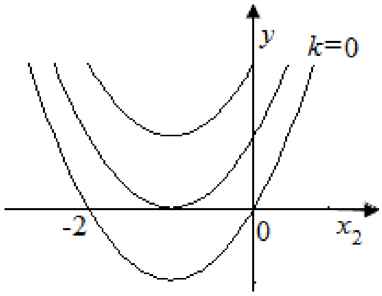
Ponendo $x_2=k$ in $f(\underline{x}) = x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - 4$,
si ottiene $y = x_1^{\ 2} - 4 + k^2$, $\underline{x} \in R$.



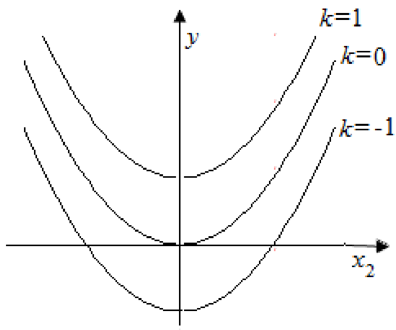
c. Ponendo $x_1=k$ in $f(\underline{x}) = x_1^{\ 2} + 2x_1 + x_2^{\ 2}$,
si ottiene $y = x_2^{\ 2} + k^2 + 2k$, $\underline{x} \in R$.



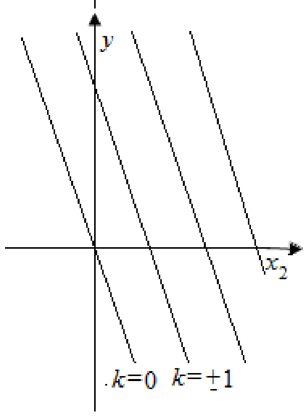
Ponendo $x_2=k$ in $f(\underline{x}) = x_1^{\ 2} + 2x_1 + x_2^{\ 2}$,
si ottiene $y = x_1^{\ 2} + 2x_1 + k^2$, $\underline{x} \in R$.



d. Ponendo $x_1=k$ in $f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2^{\ 2}$, $\underline{x} \in R^2$,
si ottiene $y = x_2^{\ 2} + 2k$, $\underline{x} \in R$.



Ponendo $x_2=k$ in $f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2^{\ 2}$, $\underline{x} \in R^2$,
si ottiene $y = 2x_1 + k^2$, $\underline{x} \in R$.



4. Per le seguenti funzioni, quando possibile, calcolare nel punto $\underline{x}^0$:

il gradiente e la derivata direzionale lungo la direzione indicata (attenzione, la direzione $\underline{u}$ deve essere normalizzata dividendo per la norma)

a. $f : R^3 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_3^2$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Soluzione

Il dominio è R^3

$\|\underline{u}\| = \sqrt{2}$ quindi la direzione è $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_2$$

$$f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1 \qquad \nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$f_3' = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3$$

$$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. D_v f(\underline{x}^0) = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

b. $f : R^2 \to R$ tale che $f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2} + x_1^2$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Soluzione

Il dominio è R^2

$\|\underline{u}\| = \sqrt{5}$ quindi la direzione è $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2e^{x_1x_2} + 2x_1,\ f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1e^{x_1x_2}$$

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2e^{x_1x_2} + 2x_1 \\ x_1e^{x_1x_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$D_v f(\underline{x}^0) = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

c. $f : R^3 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 - 2x_2x_3$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Soluzione

Il dominio è R^3

$\|\underline{u}\| = \sqrt{3}$ quindi la direzione è $\underline{v} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_3 \quad \nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_3 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$$

$$f_3' = \frac{\partial f}{\partial x_3} = -2x_2$$

$$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}. D_v f(\underline{x}^0) = \langle \nabla f(\underline{x}^0), \underline{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

6. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni e, verificando se queste sono concave o convesse, dire se sono punti di massimo o di minimo globale (assoluto).

   a. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = -3x_1^4 - x_2^2$

   $$\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = -12x_1^3, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = -2x_2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} -12x_1^3 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

   $f(\underline{0}) = 0$ **e** $f(\underline{x}) = -3x_1^4 - x_2^2 \le 0$ quindi l'origine è un punto di massimo assoluto forte (è l'unico).

   Si sarebbe potuto anche osservare che la funzione è concava; infatti $H_f = \begin{bmatrix} -36x_1^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ è semidefinita negativa essendo $-36x_1^2 \le 0, |H_f| = 72x_1^2 \ge 0$.

   b. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^4 x_2^2$

   $\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = 4x_1^3 x_2^2, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = 2x_1^4 x_2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1^3 x_2^2 \\ 2x_1^4 x_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0$ quindi i punti stazionari sono tutti i punti degli assi e in tali punti la funzione vale 0, poiché $f(\underline{x}) = x_1^4 x_2^2 \ge 0$ tali punti sono di minimo assoluto debole.

   c. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = -x_1^2 x_2$

   $\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = -2x_1 x_2, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = -x_1^2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} -2x_1 x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow x_1 = 0$ quindi tutti i punti dell'asse x_2 dove la funzione vale 0.

   $f(\underline{x}) = -x_1^2 x_2 \ge 0 \Leftrightarrow x_2 \le 0$ e $f(\underline{x}) = -x_1^2 x_2 \le 0 \Leftrightarrow x_2 \ge 0$ quindi i punti stazionari sono di sella.

   d. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = \ln(x_1^2 + x_2^2), \underline{x} \ne \underline{0}$

   $\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow \nabla f = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$ impossibile quindi *f* non ha punti di massimo né di minimo.

7. Determinare i punti di massimo e di minimo locale (relativo) delle seguenti funzioni utilizzando la C.S. del secondo ordine

   a. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^3 x_2$

   $\nabla f = \begin{bmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ quindi punti critici sono tutti i punti dell'asse x_2 :sono $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, a \in R$.

   $H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ è semidefinita e i punti critici sono di sella; infatti, ogni intorno completo di $\underline{x}^0$ contiene punti per cui la funzione è negativa (se x_1 e x_2 sono discordi) e punti per cui la funzione è positiva (se x_1 e x_2 sono concordi).

   Concludendo la funzione non ha né punti di massimo né di minimo.

   b. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = (x_1^2 - 1)(x_2 + 1)$

   $\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = 2x_1(x_2 + 1), \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = x_1^2 - 1$

   $\frac{\partial^2 f}{dx_1^2}(\underline{x}) = 2(x_2 + 1), \frac{\partial^2 f}{dx_1 dx_2}(\underline{x}) = 2x_1, \frac{\partial^2 f}{dx_2^2}(\underline{x}) = 0$

   $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1(x_2 + 1) \\ x_1^2 - 1 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

   I punti critici sono:

   $\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ indefinita quindi $\underline{x}^1$ è punto di sella

   $\underline{x}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ indefinita quindi $\underline{x}^2$ è punto di sella

   Concludendo la funzione non ha né punti di massimo né di minimo.

   c. $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_2^2(1 - x_1^2 - 2x_1)$

   $\frac{\partial f}{dx_1}(\underline{x}) = -2x_2^2(x_1 + 1), \frac{\partial f}{dx_2}(\underline{x}) = 2x_2(1 - x_1^2 - 2x_1)$

   $\frac{\partial^2 f}{dx_1^2}(\underline{x}) = -2x_2^2, \frac{\partial^2 f}{dx_1 dx_2}(\underline{x}) = -4x_2(x_1 + 1), \frac{\partial^2 f}{dx_2^2}(\underline{x}) = 2(1 - x_1^2 - 2x_1)$

   $\nabla f = \begin{bmatrix} -2x_2^2(x_1 + 1) \\ 2x_2(1 - x_1^2 - 2x_1) \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow x_2 = 0$

   I punti critici sono tutti i punti dell'asse x_1:

   $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(1 - a^2 - 2a) \end{bmatrix}$ poiché

- $2\left(1-a^2-2a\right)>0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}<a<-1+\sqrt{2}$ implica $H_f\left(\underline{x}^0\right)$ semidefinito positivo e i punti critici sono di minimo relativo; infatti risulta $f\left(\underline{x}\right)< f\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=0$.
- $2\left(1-a^2-2a\right)<0 \Leftrightarrow a<-1-\sqrt{2} \vee a>-1+\sqrt{2}$ implica $H_f\left(\underline{x}^0\right)$ semidefinito negativo e i punti critici sono di massimo relativo; infatti risulta $f\left(\underline{x}\right)> f\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=0$.
- $2\left(1-a^2-2a\right)=0 \Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{2}$ implica $H_f\left(\underline{x}^0\right)$ nullo e i punti critici sono di sella; infatti non esistono intorni completi dei punti $\begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ in cui la funzione assume lo stesso segno.