Esercitazione su Spazi vettoriali e rango di una matrice

1. **Spazi vettoriali**
2. **Calcolo del Rango**

1.

Stabilire se
$A = \{\underline{x} \in R^3 : \underline{x} = [0 \quad x_2 \quad x_3] \wedge x_2, x_3 \in R\}$
è sottospazio vettoriale e, qualora lo sia, determinarne una base

Soluzione

Sì, l'insieme *A* è un sottospazio vettoriale perché comunque presi due vettori di *A*
$\underline{x} = [0 \quad x_2 \quad x_3]^T$ e $\underline{y} = [0 \quad y_2 \quad y_3]^T$ si ha:
$\underline{x} + \underline{y} = [0 \quad x_2 + y_2 \quad x_3 + y_3]^T \in A$ e $k \cdot \underline{x} = [0 \quad kx_2 \quad kx_3]^T \in A$

Una base è $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$; infatti i due vettori sono linearmente indipendenti e generano tutto il sottospazio *A*: $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_2, x_3 \in R$.

2. Stabilire se i vettori

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\underline{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

sono linearmente indipendenti

Soluzione

Sì, sono linearmente indipendenti; infatti, usando la definizione si ha

$$\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ 2\alpha + \beta \\ -\alpha - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = 0, \beta = 0$$

Si poteva dimostrare anche dicendo che la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango 2; infatti

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

3. Verificare che i vettori

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

sono una base per $\mathbb{R}^3$ e come il vettore

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

si può esprimere come combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Soluzione

I vettori dati sono una base per $\mathbb{R}^3$ in quanto sono 3 vettori linearmente indipendenti; infatti la matrice

$$A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenuta accostando i tre vettori ha rango 3 in quanto

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

Il vettore $\underline{v}$ si può esprimere come combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ se esistono α, β, γ tali che

$$\underline{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

questo equivale a trovare un vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ per cui vale $A\underline{x} = \underline{v}$.

Poiché det(A)=1≠0, A è non singolare quindi invertibile e l'inversa è

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene $\underline{x} = A^{-1}\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$, quindi i coefficienti della combinazione lineare sono $\alpha = -26, \beta = 7, \gamma = 10$ e $\underline{v} = -26\underline{v}_1 + 7\underline{v}_2 + 10\underline{v}_3$.

4. Stabilire se i seguenti vettori sono una base per $\mathbb{R}^3$.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione

No, sono solo due vettori!

5. Stabilire se i vettori

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

sono una base per $\mathbb{R}^2$.

Soluzione

No, sono tre vettori quindi possono essere un insieme di generatori ma non una base. Per individuare una base bisogna trovare due vettori lin. indipendenti.

$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$ quindi $\{\underline{x}, \underline{y}\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.

6. Dati i vettori $\underline{v} = [-1 \quad -3]^T$ e $\underline{w} = [1 \quad 1]^T$, stabilire se sono una base per $\mathbb{R}^2$ ed esprimere il vettore

$\underline{x} = [8 \quad 10]^T$ come combinazione lineare di $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Soluzione

I vettori dati costituiscono una base per $\mathbb{R}^2$ e il vettore $\underline{x}$ si può esprimere come combinazione lineare di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ nel seguente modo $\underline{x} = -\underline{v} + 7\underline{w}$

7. Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale generato da

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Soluzione

La base del sottospazio vettoriale è data, per esempio, dai primi due vettori $\underline{v}_1 = [0 \quad 3/2 \quad -2]^T$, $\underline{v}_2 = [-1/2 \quad 1/2 \quad -1]^T$ e la dimensione del sottospazio è due.

8. Stabilire per quali valori di *k* i seguenti vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$:

$\underline{a} = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Se $k \neq -1$ i vettori $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.
Se k=-1 i vettori linearmente indipendenti sono 2, per esempio $\underline{b}$ e $\underline{c}$ e il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ da essi generato ha dimensione 2.

9. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluzione

$r(A) = 2$, $r(B) = 1$, $r(C) = 2$, $r(D) = 3$, $r(E) = 2$, $r(F) = 2$, $r(G) = 3$, $r(H) = 3$