Esercitazione sui Sistemi lineari

1. **Metodo di Gauss per la determinazione del rango di una matrice**
2. **Teorema di Rouché-Capelli**

1. Verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sono una base per $\mathbb{R}^3$ e calcolare i coefficienti che permettono di esprimere il vettore

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

come combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Soluzione

I vettori dati sono una base per $\mathbb{R}^3$ in quanto sono 3 vettori linearmente indipendenti; infatti la matrice

$$A = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenuta accostando i tre vettori ha rango 3 in quanto

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

Il vettore $\underline{v}$ si può esprimere come combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ se esistono α, β, γ tali che

$$\underline{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

questo equivale a trovare un vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ per cui vale $A\underline{x} = \underline{v}$.

Poiché det(A)=1≠0, A è non singolare quindi invertibile e l'inversa è

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene $\underline{x} = A^{-1}\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$, quindi i coefficienti della combinazione lineare sono $\alpha = -26, \beta = 7, \gamma = 10$ e $\underline{v} = -26\underline{v}_1 + 7\underline{v}_2 + 10\underline{v}_3$.

2. Calcolare il rango della matrice con il metodo di Gauss

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$rg(D)$=3; infatti facendo operazioni elementari sulle righe si ottengono successivamente matrici con lo stesso rango $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(D) = 3$

In alternativa si può utilizzare il metodo di Kroneker

- Determiniamo, se esiste, un minore di ordine 1 non nullo
  $a_{1,1} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(D) \geq 1$
- Determiniamo, se esiste, un minore di ordine 2 non nullo
  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(D) \geq 2$
- Determiniamo, se esiste, un minore di ordine 3 non nullo
  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2(6-3) + (3-6) = -9 \neq 0 \quad \Rightarrow rg(D) = 3$

3. Utilizzando il metodo di Gauss, determinare se esiste un vettore *x* tale *Ax*= *b*

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Soluzione

Il sistema $\begin{cases} x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ è determinato infatti

- la matrice completa è $[A \mid b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- la matrice [*A*|*b*] ha lo stesso rango di
  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ottenuta scambiando la prima riga con la seconda;

- dalla matrice finale si deduce che $rg(A)=rg(A|b)=3$ quindi il sistema è determinato;
- il sistema equivalente è $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$

La soluzione è $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$.

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Soluzione

Il sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ è impossibile infatti

- la matrice completa è $[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
- la matrice $[A|b]$ ha lo stesso rango di

$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} -3 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \\ -4 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- dalla matrice finale si deduce che $rg(A)=2$ e $rg(A|b)=3$ quindi il due ranghi sono diversi e sistema è impossibile.

4. Risolvere i seguenti sistemi:

a. $\begin{cases} 5x + 3y + 3z = 48 \\ 2x + 6y - 3z = 18 \\ 8x - 3y + 2z = 21 \end{cases}$

Soluzione

- la matrice completa è $[A \mid b] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 48 \\ 2 & 6 & -3 & 18 \\ 8 & -3 & 2 & 21 \end{bmatrix}$

- la matrice [A|b] ha lo stesso rango di

$$\begin{array}{r}2\\-5\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}5 & 3 & 3 & 48\\2 & 6 & -3 & 18\\8 & -3 & 2 & 21\end{bmatrix}\rightarrow\begin{array}{r}8\\ \\-5\end{array}\begin{bmatrix}5 & 3 & 3 & 48\\0 & -24 & 21 & 6\\8 & -3 & 2 & 21\end{bmatrix}\rightarrow\begin{array}{r} \\39\\24\end{array}\begin{bmatrix}5 & 3 & 3 & 48\\0 & -24 & 21 & 6\\0 & 39 & 14 & 279\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5 & 3 & 3 & 48\\0 & -24 & 21 & 6\\0 & 0 & 1155 & 6930\end{bmatrix}$$

- Il minore $\begin{vmatrix}5 & 3 & 3\\0 & -24 & 21\\0 & 0 & 1155\end{vmatrix}\neq 0$ comprende le righe 1, 2 e 3 e le colonne 1,2 e 3 che sono quindi linearmente indipendenti, si deduce si deduce che $rg(A)=rg(A|b)=3$ pari al numero delle incognite quindi il sistema è determinato;

- il sistema equivalente è $\begin{bmatrix}5 & 3 & 3\\0 & -24 & 21\\0 & 0 & 1155\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48\\6\\6930\end{bmatrix}$ ossia $\begin{cases}5x+3y+3z=48\\-24y+21z=6\\1155z=6930\end{cases}$

$$\begin{cases}5x+3y+3z=48\\-24y+21z=6\\z=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+3y+3z=48\\y=5\\z=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=5\\z=6\end{cases}.$$

b. $\begin{cases}x+2y+z=0\\x+y-z=0\\x+3y+3z=0\end{cases}$

Soluzione

- la matrice completa è $[A\,|\,b]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & -1 & 0\\1 & 3 & 3 & 0\end{bmatrix}$

  e il sistema è compatibile perché $rg(A)=rg(A|b)$.

- la matrice [A|b] ha lo stesso rango di

$$\begin{array}{r}1\\-1\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & -1 & 0\\1 & 3 & 3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{array}{r}1\\ \\-1\end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\1 & 3 & 3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{array}{r} \\1\\1\end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

  Il minore $\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ comprende le righe 1 e 2 e le colonne 1 e 2 che sono quindi linearmente indipendenti, si deduce che $rg(A)=rg(A|b)=2<3$ quindi il sistema è indeterminato;

- il sistema equivalente è $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ossia

$\begin{cases}x+2y+z=0\\y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=-z\\y=-2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3z\\y=-2z\end{cases}$ ossia con $z\in R$ quindi il sistema ha infinite soluzioni:

$$\begin{bmatrix}3z\\-2z\\z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix},z\in R$$