Liceo "Carducci" Volterra - Prof. Francesco Daddi - 19 dicembre 2011

Verifica di limiti: esercizi svolti - Classe 3^aA Classico

Esercizio 1. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M>0$, la disequazione $\dfrac{1}{x-2}>M$ è soddisfatta in un intorno destro di 2. Si ha:

$$\frac{1}{x-2}>M \;\Rightarrow\; \frac{1}{x-2}-M>0 \;\Rightarrow\; \frac{1-M\,x+2\,M}{x-2}>0\,;$$

la disequazione è soddisfatta per $2<x<2+\dfrac{1}{M}$; questo è un intorno destro di 2, quindi il limite è verificato.

Esercizio 2. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{2\,x-5}{x-3}=+\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M>0$, la disequazione $\dfrac{2\,x-5}{x-3}>M$ è soddisfatta in un intorno destro di 3. Si ha:

$$\frac{2\,x-5}{x-3}>M \;\Rightarrow\; \frac{2\,x-5}{x-3}-M>0 \;\Rightarrow\; \frac{2\,x-5-M\,x+3\,M}{x-3}>0 \;\Rightarrow\; \frac{(2-M)\,x+3\,M-5}{x-3}>0\,;$$

ai fini della verifica del limite non è restrittivo supporre $M>2$.

Dal momento che risulta $\dfrac{3\,M-5}{M-2}=\dfrac{3(M-2)+6-5}{M-2}=\dfrac{3(M-2)+1}{M-2}=3+\dfrac{1}{M-2}$, la disequazione è soddisfatta per $3<x<3+\dfrac{1}{M-2}$: si tratta di un intorno destro di 3, per cui il limite è verificato.

Esercizio 3. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+1}{3+3\,x}=+\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M>0$, la disequazione $\dfrac{x^2+1}{3+3\,x}>M$ è soddisfatta in un intorno destro di -1. Si ha:

$$\frac{x^2+1}{3+3\,x}>M \;\Rightarrow\; \frac{x^2+1-3\,M\,x-3\,M}{3+3\,x}>0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-3\,M\,x+(1-3\,M)}{3+3\,x}>0\,;$$

ai fini della verifica del limite non è restrittivo supporre $M>1$; risulta: Num $>0 \;\Rightarrow\; x<\dfrac{3\,M-\sqrt{9\,M^2+12\,M-4}}{2}\;\cup\; x>\dfrac{3\,M+\sqrt{9\,M^2+12\,M-4}}{2}$; Den $>0 \;\Rightarrow\; x>-1$. Dimostriamo ora che, sotto l'ipotesi $M>1$, risulta $\dfrac{3\,M-\sqrt{9\,M^2+12\,M-4}}{2}>-1$: $\dfrac{3\,M}{2}+1>\dfrac{\sqrt{9\,M^2+12\,M-4}}{2} \;\Rightarrow\; \cancel{\dfrac{9\,M^2}{4}}+\cancel{3\,M}+1>\cancel{\dfrac{9\,M^2}{4}}+\cancel{3\,M}-1 \;\Rightarrow\; 1>-1$ (ok).

La disequazione è perciò soddisfatta per $-1<x<\dfrac{3\,M-\sqrt{9\,M^2+12\,M-4}}{2}$ e per $x>\dfrac{3\,M+\sqrt{9\,M^2+12\,M-4}}{2}$.

Dal momento che il limite in esame è per $x\to -1^+$, ci interessa solo $-1<x<\dfrac{3\,M-\sqrt{9\,M^2+12\,M-4}}{2}$: si tratta di un intorno destro di -1, quindi il limite è verificato.

Osservazione. In realtà abbiamo dimostrato anche che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3+3\,x}=+\infty$.

Esercizio 4. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to 4^+}\frac{2\,x+1}{4-x}=-\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M>0$, la disequazione $\dfrac{2\,x+1}{4-x}<-M$ è soddisfatta in un intorno destro di 4. Si ha:

$$\frac{2\,x+1}{4-x}<-M \;\Rightarrow\; \frac{2\,x+1+4\,M-M\,x}{4-x}<0 \;\Rightarrow\; \frac{(2-M)\,x+1+4\,M}{4-x}<0$$

ai fini della verifica del limite non è restrittivo supporre $M>2$, e quindi $2-M<0$.

Dal momento che risulta $\dfrac{4\,M+1}{M-2} = \dfrac{4(M-2)+8+1}{M-2} = 4+\dfrac{9}{M-2}$, la disequazione è risolta per $4 < x < 4+\dfrac{9}{M-2}$: si tratta di un intorno destro di 4, quindi il limite è verificato.

Esercizio 5. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{3+4\,x}{5-5\,x} = +\infty$.

<u>Soluzione.</u> Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{3+4\,x}{5-5\,x} > M$ è soddisfatta in un intorno sinistro di 1. Si ha:

$$\frac{3+4\,x}{5-5\,x} > M \;\;\Rightarrow\;\; \frac{3+4\,x-5\,M+5\,Mx}{5-5\,x} > 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{(5\,M+4)\,x+3-5\,M}{5-5\,x} > 0$$

la disequazione è risolta per $\dfrac{5\,M-3}{5\,M+4} < x < 1$, ovvero $1-\dfrac{7}{5\,M+4} < x < 1$: si tratta di un intorno sinistro di 1, quindi il limite è verificato.

Esercizio 6. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to -6^-} \frac{2}{36-x^2} = -\infty$.

<u>Soluzione.</u> Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{2}{36-x^2} < -M$ è soddisfatta in un intorno sinistro di -6. Si ha:

$$\frac{2}{36-x^2} < -M \;\;\Rightarrow\;\; \frac{2-M\,x^2+36\,M}{36-x^2} < 0$$

la disequazione è soddisfatta per $-\sqrt{36+\dfrac{2}{M}} < x < -6 \;\cup\; 6 < x < \sqrt{36+\dfrac{2}{M}}$; dal momento che il limite è per $x \to -6^-$, ci interessa solo l'intorno sinistro di -6 : $-\sqrt{36+\dfrac{2}{M}} < x < -6$. Il limite è quindi verificato.

Osservazione. In realtà abbiamo dimostrato anche che $\displaystyle\lim_{x\to 6^+} \frac{2}{36-x^2} = -\infty$.

Esercizio 7. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{4} = +\infty$.

<u>Soluzione.</u> Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{x-3}{4} > M$ è soddisfatta in un intorno di $+\infty$. Si ha

$$\frac{x-3}{4} > M \;\;\Rightarrow\;\; \frac{x-3-4\,M}{4} > 0\,;$$

la disequazione ha come soluzione $x > 4\,M+3$: si tratta di un intorno di $+\infty$, quindi il limite è verificato.

Esercizio 8. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{4\,x-1}{x+2} = 4$.

<u>Soluzione.</u> Dobbiamo verificare che, per ogni $\varepsilon > 0$, la disequazione $\left|\dfrac{4\,x-1}{x+2}-4\right| < \varepsilon$ è soddisfatta in un intorno di $-\infty$. Si ha

$$\left|\frac{4\,x-1}{x+2}-4\right| < \varepsilon \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} \dfrac{4\,x-1}{x+2} > 4-\varepsilon \\[2mm] \dfrac{4\,x-1}{x+2} < 4+\varepsilon \end{cases}$$

la prima disequazione è soddisfatta per $x < -2 \;\cup\; x > \dfrac{9}{\varepsilon}-2$; la seconda, invece, è risolta per $x < -\dfrac{9}{\varepsilon}-2 \;\cup\; x > -2$. Il sistema è dunque soddisfatto per $x < -\dfrac{9}{\varepsilon}-2 \;\cup\; x > \dfrac{9}{\varepsilon}-2$. A noi interessa $x < -\dfrac{9}{\varepsilon}-2$: si tratta di un intorno di $-\infty$, pertanto il limite è verificato.

Osservazione. In realtà abbiamo dimostrato anche che $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{4\,x-1}{x+2} = 4$.

Esercizio 9. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$.

<u>Soluzione.</u> Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{x^2+1}{x} > M$ è soddisfatta in un intorno di $+\infty$. Si ha:

$$\frac{x^2+1}{x} > M \;\;\Rightarrow\;\; \frac{x^2+1-M\,x}{x} > 0$$

ai fini della verifica del limite non è restrittivo supporre $M > 2$;

$$\text{Num} > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2} \quad \cup \quad x > \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2} \; ;$$

$$\text{Den} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \, .$$

Dimostriamo ora che, sotto l'ipotesi $M > 2$, risulta $\dfrac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2} > 0$: $\dfrac{M}{2} > \dfrac{\sqrt{M^2 - 4}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cancel{\dfrac{M^2}{4}} > \cancel{\dfrac{M^2}{4}} - 1 \quad \Rightarrow$ $0 > -1$ (ok).

La disequazione è perciò verificata per $0 < x < \dfrac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2} \quad \cup \quad x > \dfrac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2}$.

A noi interessa solo $x > \dfrac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2}$: si tratta di un intorno di $+\infty$, pertanto il limite è verificato.

Osservazione. In realtà abbiamo dimostrato anche che $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$.

Esercizio 10. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1 - x} = -\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{x^2}{1 - x} < -M$ è soddisfatta in un intorno di $+\infty$. Si ha:

$$\frac{x^2}{1 - x} < -M \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - M\,x + M}{1 - x} < 0$$

ai fini della verifica del limite non è restrittivo supporre $M > 4$;

$$\text{Num} > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{M - \sqrt{M^2 - 4\,M}}{2} \quad \cup \quad x > \frac{M + \sqrt{M^2 - 4\,M}}{2}$$

$$\text{Den} > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1 \, .$$

Dimostriamo che $\dfrac{M - \sqrt{M^2 - 4\,M}}{2} > 1$:

$$\frac{M}{2} - 1 > \frac{\sqrt{M^2 - 4\,M}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{M^2}{4}} + 1 \cancel{- M} > \cancel{\frac{M^2}{4}} \cancel{- M} \quad \Rightarrow \quad 1 > 0 \;\; \text{(ok)} \, .$$

La disequazione è perciò soddisfatta per $1 < x < \dfrac{M - \sqrt{M^2 - 4\,M}}{2} \quad \cup \quad x > \dfrac{M + \sqrt{M^2 - 4\,M}}{2}$; ci interessa solo $x > \dfrac{M + \sqrt{M^2 - 4\,M}}{2}$: si tratta di un intorno di $+\infty$, pertanto il limite è verificato.

Osservazione. In realtà abbiamo dimostrato anche che $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1 - x} = -\infty$.

Esercizio 11. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2\,x^2 - 3}{x} = -\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{2\,x^2 - 3}{x} < -M$ è soddisfatta in un intorno di $-\infty$. Si ha:

$$\frac{2\,x^2 - 3}{x} < -M \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,x^2 + M\,x - 3}{x} < 0 \, ;$$

dato che $\dfrac{-M + \sqrt{M^2 + 24}}{2} > 0$, la disequazione è risolta per $x < \dfrac{-M - \sqrt{M^2 + 24}}{2} \quad \cup \quad 0 < x < \dfrac{-M + \sqrt{M^2 + 24}}{2}$; ci interessa solo $x < \dfrac{-M - \sqrt{M^2 + 24}}{2}$: si tratta di un intorno di $-\infty$, pertanto il limite è verificato.

Osservazione. In realtà abbiamo dimostrato anche che $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{2\,x^2 - 3}{x} = -\infty$.

Esercizio 12. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{3\,x^2 - 18\,x + 24}{2 - x} = 6$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $\varepsilon > 0$, la disequazione $\left|\dfrac{3x^2-18x+24}{2-x}-6\right| < \varepsilon$ è soddisfatta in un intorno destro di 2. Si ha:

$$\left|\frac{3x^2-18x+24}{2-x}-6\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{3x^2-12x+12}{2-x}\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{3(x-2)^2}{2-x}\right| < \varepsilon \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} |-3(x-2)| < \varepsilon \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |3(x-2)| < \varepsilon \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

la disequazione è verificata in un intorno circolare di 2 (escluso $x = 2$), quindi in particolare possiamo dire che il limite è verificato, infatti come intorno destro possiamo scegliere $2 < x < 2 + \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Osservazione. In realtà abbiamo dimostrato che $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-18x+24}{2-x} = 6$.

Esercizio 13. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x-1} = 4$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $\varepsilon > 0$, la disequazione $\left|\dfrac{2x}{x-1}-4\right| < \varepsilon$ è soddisfatta in un intorno di $x = 2$. Si ha:

$$\left|\frac{2x}{x-1}-4\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} > 4-\varepsilon \\ \dfrac{2x}{x-1} < 4+\varepsilon \end{cases}$$

ai fini della verifica del limite non è restrittivo supporre $\varepsilon < 2$; la prima disequazione è risolta per $1 < x < \dfrac{4-\varepsilon}{2-\varepsilon}$; la seconda disequazione è risolta invece per $x < 1 \;\cup\; x > \dfrac{4+\varepsilon}{2+\varepsilon}$. Poiché $\dfrac{4+\varepsilon}{2+\varepsilon} = \dfrac{2(2+\varepsilon)-\varepsilon}{2+\varepsilon} = 2 - \dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, $\dfrac{4-\varepsilon}{2-\varepsilon} = \dfrac{2(2-\varepsilon)+\varepsilon}{2-\varepsilon} = 2 + \dfrac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$, la disequazione iniziale è risolta per $2 - \dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < x < 2 + \dfrac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$: si tratta di un intorno di 2, quindi il limite è verificato.

Esercizio 14. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\ln(x^2-4) = -\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\ln(x^2-4) < -M$ è soddisfatta in un intorno sinistro di -2. Si ha:

$$\ln(x^2-4) < -M \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2-4 > 0 \\ x^2-4 < e^{-M} \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono $-\sqrt{4+e^{-M}} < x < -2 \;\cup\; 2 < x < \sqrt{4+e^{-M}}$. Ci interessa l'intervallo $-\sqrt{4+e^{-M}} < x < -2$: si tratta di un intorno sinistro di -2, per cui il limite è verificato.

Esercizio 15. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to 5^+}\frac{2}{\sqrt{x-5}} = +\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{2}{\sqrt{x-5}} > M$ è soddisfatta in un intorno destro di 5. Si ha:

$$\frac{2}{\sqrt{x-5}} > M \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{4}{x-5} > M^2 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-5}{4} < \dfrac{1}{M^2} \\ x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5 < \dfrac{4}{M^2} \\ x-5 > 0 \end{cases}$$

la disequazione è risolta per $5 < x < 5 + \dfrac{4}{M^2}$: si tratta di un intorno destro di 5, per cui il limite è verificato.

Esercizio 16. *Verifica che* $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{6}{x^2+6x+9} = +\infty$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{6}{x^2+6x+9} > M$ è soddisfatta in un intorno di -3 ($x = -3$ escluso). Si ha:

$$\frac{6}{x^2+6x+9} > M \;\Rightarrow\; \frac{6}{(x+3)^2} > M \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{(x+3)^2}{6} < \dfrac{1}{M} \\ x \neq -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 < \dfrac{6}{M} \\ x \neq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{6}{M}} < x+3 < \sqrt{\dfrac{6}{M}} \\ x \neq -3 \end{cases}$$

la disequazione è soddisfatta per $-3 - \sqrt{\dfrac{6}{M}} < x < -3 \ \cup \ -3 < x < -3 + \sqrt{\dfrac{6}{M}}$: si tratta di un intorno di $x = -3$ (escluso -3), per cui il limite è verificato.

Esercizio 17. *Verifica che* $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{2\,x+10}{25-x^2} = -\infty$.

__**Soluzione.**__ Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\dfrac{2\,x+10}{25-x^2} < -M$ è soddisfatta in un intorno destro di 5. Si ha:

$$\frac{2\,x+10}{25-x^2} < -M \Rightarrow \frac{2(x+5)}{(5-x)(5+x)} < -M \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\cancel{(x+5)}}{(5-x)\cancel{(5+x)}} < -M \\ x \neq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2+5\,M-M\,x}{5-x} < 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

la disequazione è risolta per $5 < x < 5 + \dfrac{2}{M}$: si tratta di un intorno destro di 5, quindi il limite è verificato.

Esercizio 18. *Verifica che* $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$.

__**Soluzione.**__ Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $\sqrt{1-x} > M$ è soddisfatta in un intorno di $-\infty$. Si ha:

$$\sqrt{1-x} > M \Rightarrow \begin{cases} 1-x > M^2 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1-M^2 \\ x < 1 \end{cases} ;$$

la disequazione è risolta per $x < 1 - M^2$: si tratta di un intorno di $-\infty$, pertanto il limite è verificato.

Esercizio 19. *Verifica che* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.

__**Soluzione.**__ Dobbiamo verificare che, per ogni $\varepsilon > 0$, la disequazione $\left|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right| < \varepsilon$ è soddisfatta in un intorno di $+\infty$.

Supponendo $\varepsilon < 1$, la disequazione è risolta per $x > \dfrac{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}{4\,\varepsilon^2}$: si tratta di un intorno di $+\infty$, per cui il limite è verificato.

Esercizio 20. *Verifica che* $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-4\,x+1} + x - 5 = -3$.

__**Soluzione.**__ Dobbiamo verificare che, per ogni $\varepsilon > 0$, la disequazione $\left|\sqrt{x^2-4\,x+1} + x - 5 - (-3)\right| < \varepsilon$ è soddisfatta in un intorno di $-\infty$. Svolgendo i calcoli si trova che, se $\varepsilon < \sqrt{3}$, le soluzioni della disequazione

$$\left|\sqrt{x^2-4\,x+1} + x - 2\right| < \varepsilon$$

sono $x < 2 - \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{3}{2\,\varepsilon}$: si tratta di un intorno di $-\infty$, pertanto il limite è verificato.

Esercizio 21. *Verifica che* $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 \cdot 5^{\left(\frac{x-2}{3}\right)} = +\infty$.

__**Soluzione.**__ Dobbiamo verificare che, per ogni $M > 0$, la disequazione $2 \cdot 5^{\left(\frac{x-2}{3}\right)} > M$ è soddisfatta in un intorno di $+\infty$. Si ha:

$$2 \cdot 5^{\left(\frac{x-2}{3}\right)} > M \Rightarrow 5^{\left(\frac{x-2}{3}\right)} > \frac{M}{2} \Rightarrow \frac{x-2}{3} > \log_5\left(\frac{M}{2}\right) \Rightarrow x - 2 > 3 \cdot \log_5\left(\frac{M}{2}\right)$$

la disequazione è risolta per $x > 2 + 3 \cdot \log_5\left(\dfrac{M}{2}\right)$: si tratta di un intorno di $+\infty$, pertanto il limite è verificato.