Lezione 24 – Integrale generalizzato (Programma avanzato)

Problema 24.1
Si consideri il problema di determinare l’area sottesa da una funzione in un intervallo illimitato. E' legittimo chiedersi se il problema abbia senso; infatti se la regione non è limitata si può pensare che non lo sia nemmeno la sua area. Vedremo che così non è, ovvero il problema può avere soluzione, tuttavia questa non esiste in tutti i casi.

In molte applicazioni ci si trova a dover misurare l'area di regioni non limitate o, più in generale, a dover calcolare l'integrale di una funzione non limitata o relativo a un intervallo non limitato.

Per esempio l'integrale della funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nell'intervallo [0,1] o l'integrale della funzione $\frac{1}{x^2}$ nell'intervallo $[1,+\infty)$.

Consideriamo il problema del **calcolo dell’area di un rettangoloide non limitato**. Si possono verificare due casi:

1) L’intervallo di integrazione non è limitato; per esempio $[a,+\infty)$
2) La funzione non è limitata nell’intervallo di integrazione $[a,b]$.

In base a quanto detto finora, non sarebbe possibile usare l’integrale definito; tuttavia la definizione di integrale definito può essere usata anche in questo caso considerando gli integrali in questione come limiti di integrali definiti.

Definizione 24.1
Si definisce **integrale generalizzato** o **improprio** un integrale relativo o ad un intervallo di integrazione non è limitato o ad una funzione non è limitata nell’intervallo di integrazione.
Si considerano due casi:

1) $\int_0^{+\infty} f(x)dx$

2) $\int_a^b f(x)dx$ con $f(x)$ non limitata in $[a,b]$

Caso 1) Se una funzione $f(x)$ è definita in un intervallo $[a,+\infty)$ ed esiste

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx \quad \text{con } b>a$$

se, inoltre, esiste finito il limite di $I(b)$ per $b\to+\infty$, si dice che l’integrale è convergente e

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} I(b)$$

Qualora il limite di $I(b)$ per $b\to+\infty$ **o non esiste o non è finito** si dice che l’integrale è **non convergente o divergente.**

Osservazione
L’essere infinitesima della funzione integranda è condizione necessaria per l’intagrabilità ma non è sufficiente; l’integrale generalizzato è convergente se la funzione integranda tende a 0 in modo sufficientemente “forte”. In questo caso la regione compresa fra il grafico e l’asse x ha superficie limitata e area pari all’integrale generalizzato.

In generale si può dimostrare che se una funzione $f(x)$ per $x\to+\infty$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 1, il suo integrale generalizzato è convergente, altrimenti no.

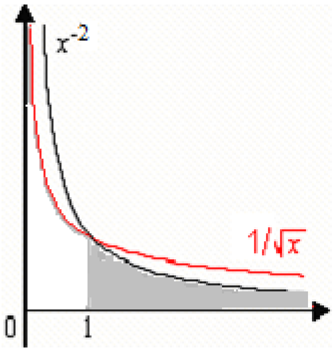
Per esempio $f(x)=1/x^a$ per $a>1$ ammette integrale generalizzato convergente, per $0<a\le 1$ ammette integrale generalizzato divergente; più precisamente, se $a>1$, si ha

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{1-a}x^{1-a}\right]_1^b=\frac{1}{1-a}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-a}-1\right)=\frac{1}{a-1}$$

Esempi 24.1

1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ in questo caso $a<1$ quindi l'integrale non è convergente;

infatti $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b=+\infty$.



2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ in questo caso $a=1$ quindi l'integrale non è convergente; infatti

$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}[\ln x]_1^b=+\infty$.

3) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ in questo caso $a>1$ quindi l'integrale è convergente; infatti

$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=1$.

Caso 2) Se una funzione $f(x)$ è definita in un intervallo $(a,b]$, non è limitata per $x\to a^+$ ed esiste

$$I(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad \text{per ogni } 0<\varepsilon<b-a$$

se, inoltre, esiste finito il limite di $I(\varepsilon)$ per $\varepsilon\to 0^+$, si dice che l'integrale su $[a,b]$ è convergente e

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}I(\varepsilon)$$

Qualora il limite di $I(\varepsilon)$ per $\varepsilon\to 0^+$ **o non esiste o non è finito** si dice che l'integrale è **non convergente**.

Osservazione L'essere infinita della funzione integranda per x tendente ad a in generale non pregiudica l'integrabilità ma l'integrale generalizzato è convergente se la funzione integranda tende a infinito in modo sufficientemente "debole".

In generale si può dimostrare che se una funzione $f(x)$ per $x\to 0$ è un infinito di ordine minore di 1, il suo integrale generalizzato è convergente, altrimenti no.

Per esempio $f(x)=1/x^a$ per $0<a<1$ ammette integrale generalizzato convergente, per $a\ge 1$ ammette integrale generalizzato divergente; più precisamente, se $0<a<1$

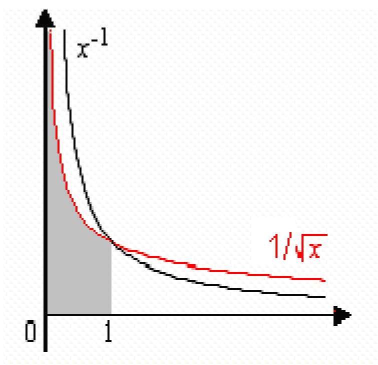
$$\int_0^1\frac{1}{x^a}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{1-a}\right]_\varepsilon^1=\frac{1}{1-a}$$

Analogamente si definisce l'integrale se $f(x)$ non è limitata per $x\to b_-$.

Esempi 24.2

1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ in questo caso $a<1$ quindi l'integrale è convergente;

infatti $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1=2$



2) $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ in questo caso $a=1$ quindi l'integrale è non convergente;

infatti $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[\log x]_\varepsilon^1=-\infty$

3) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ in questo caso a>1 quindi l'integrale è non convergente; infatti $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = +\infty$

Osservazione Se una funzione $f(x)$ non è limitata sia per $x\to a^+$ sia per $x\to b^-$, $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ se e solo se esistono gli integrali generalizzati nei due intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ con $a<c<b$; in tal caso si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Esempio 24.3

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\arcsin x\right]_{-1+\varepsilon}^c$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_c^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\arcsin x\right]_c^{1-\varepsilon}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin c - \arcsin(-1) + \arcsin(1) - \arcsin c = 2\arcsin(1)$$

Applicazione 24.1

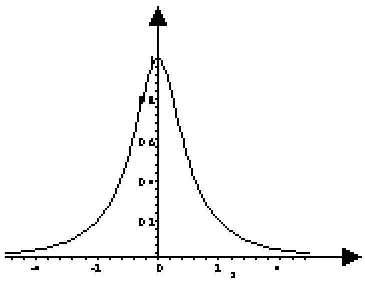
Si consideri la funzione $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ per calcolare l'area sottesa

bisogna verificare se l'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$ è

convergente e, qualora lo sia, calcolarne il valore.

Poiché

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}dx$$



basta calcolare, se esiste, l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$

Calcoliamo l'integrale sull'intervallo limitato $[0,b]$: $\int_0^b \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan b - \arctan 0 = \arctan b$.

Il limite di tale integrale è: $\lim_{b\to+\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}$ quindi l'area sottesa dal grafico di f è

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \pi \text{ !!!!}$$

Considerando la funzione $g(x)=\frac{1}{\pi}f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}$ si avrebbe $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = 1$ quindi l'area sottesa dal grafico di g su tutto l'asse reale è 1, questa proprietà caratterizza le funzioni densità di probabilità.