Lezione 25 – **Le matrici e loro operazioni**

25. 1 Un problema per iniziare: scambi fra settori produttivi.

Si considera un'economia dove, non distinguendo fra produzione e consumo, ci sono tre settori: Industria, Agricoltura, Famiglie.
Ognuno di essi produce una certa quantità di un solo bene o servizio che viene scambiata con gli altri due settori e, parzialmente, consumata internamente.
Per esempio nello stesso periodo di tempo
- l'agricoltura produce 30 quintali di grano, di cui 7,5 consumati da se stessa (sementi), 6 dall'industria e 16,5 dalle famiglie;
- l'industria produce 50 metri di stoffa, di cui 14 consumati dall'agricoltura e 6 da se stessa (tute degli operai), 30 dalle famiglie;
- le famiglie forniscono in totale 300 ore-uomo, di cui 80 all'agricoltura (contadini), 180 all'industria (operai) e 40 a se stesse (lavori domestici).

Gli scambi avvengono sulla base del prezzo di mercato di ogni bene che è un ricavo per il settore che vende e un costo per il settore che acquista.
Si vuole determinare se esiste un sistema di prezzi che garantisca l'equilibrio degli scambi tra i diversi settori ossia per ogni settore il ricavo è uguale al costo di produzione cioè il guadagno sia zero.

Definizione 25.1 - Il concetto di matrice

Una tabella di *n* righe e *m* colonne i cui elementi appartengono ad un insieme numerico, per esempio all'insieme dei numeri reali, viene detta

matrice a *n* righe e *m* colonne ossia **matrice di dimensione $n \times m$**

Normalmente una matrice viene indicata con una lettera maiuscola (per esempio *A*, *B*, *I*, *O*) e ognuno dei suoi elementi viene indicato con un simbolo che contiene **due indici**:

i il numero di riga e *j* il numero di colonna.

- Una matrice si può scrivere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}], a_{ij} \in R, i = 1, \ldots n, j = 1 \ldots m$$

- Ogni elemento della matrice $A_{n \times m}$ si può scrivere così

$$a_{ij} = A_{ij}, i = 1, \ldots n, j = 1 \ldots m$$

Una matrice che abbia
- una sola colonna (m=1) si dice **vettore colonna**
- una sola riga (n=1) si dice **vettore riga**
- un numero di righe pari al numero di colonne (n=m) si dice **matrice quadrata di ordine *n*;** altrimenti si dice rettangolare.
- se *A* è una matrice quadrata gli elementi a_{ii} formano la così detta **diagonale principale.**
- $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e sia quadrata di ordine *n* si dice **matrice identità** indicata con il simbolo I_n
- $a_{ij} = 0$ e sia quadrata di ordine *n* si dice **matrice nulla** indicata con il simbolo O_n

Esempio 25.1

La tabella in Excel

	A	B	C
1	-1	-1,1	-1,21
2	3	3,3	3,63

rappresenta la matrice 2×3 (2 righe e 3 colonne)

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -1.1 & -1.21\\ 3 & 3.3 & 3.63\end{bmatrix}$$

dove $a_{11}=-1, a_{12}=-1.1, a_{13}=-1.21, a_{21}=3, a_{22}=3.3, a_{23}=3.63$.

La tabella in Excel

	E	F
1	-1	3
2	-1,1	3,3
3	-1,21	3,63

rappresenta la matrice 3×2 (3 righe e 2 colonne)

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1.1 & 3.3\\ -1.21 & 3.63\end{bmatrix}$$

dove $b_{11}=-1, b_{12}=3, b_{21}=-1.1, b_{22}=3.3, b_{31}=-1.21, b_{32}=3.63$.

Le tabelle in Excel

	A	B	C
1	-1	-1,1	-1,21

	A	B	C
2	3	3,3	3,63

rappresentano due matrici 1×3 (1 riga e 3 colonne) ossia due **vettori riga**

$$a_1=\begin{bmatrix}-1 & -1.1 & -1.21\end{bmatrix} \qquad a_2=\begin{bmatrix}3 & 3.3 & 3.63\end{bmatrix}$$

Le tabelle in Excel

	E
1	-1
2	-1,1
3	-1,21

	F
1	3
2	3,3
3	3,63

rappresentano due matrici 3×1 (3 righe e 1 colonna) ossia due **vettori colonna**

$$b_1=\begin{bmatrix}-1\\ -1.1\\ -1.21\end{bmatrix} \qquad b_2=\begin{bmatrix}3\\ 3.3\\ 3.63\end{bmatrix}$$

Osservazioni

1) È sempre possibile scrivere una matrice $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}$ accostando

- ***n*** vettori riga a_i con $i=1,\dots,n$

oppure

- ***m*** vettori colonna b_j con $j=1,\dots,m$

Nell'esempio $A=\begin{bmatrix}-1 & -1.1 & -1.21\\ 3 & 3.3 & 3.63\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1.1 & 3.3\\ -1.21 & 3.63\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}$ oppure $A=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$ dove $c_1=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}, c_2=\begin{bmatrix}-1.1\\ 3.3\end{bmatrix}, c_3=\begin{bmatrix}-1.21\\ 3.63\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{bmatrix}$ dove $d_1=\begin{bmatrix}-1 & 3\end{bmatrix}, d_2=\begin{bmatrix}-1.1 & 3.3\end{bmatrix}, d_3=\begin{bmatrix}-1.21 & 3.63\end{bmatrix}$ oppure $B=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix}$.

Per esempio $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(1)} & e^{(2)} & e^{(3)} \end{bmatrix}$ dove $e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) Una successione di valori numerici può essere ordinata in un vettore riga o in un vettore colonna, la relazione fra le due rappresentazioni è di **trasposizione** come si ha anche in Excel. Nell'esempio: $a_1 = b_1^T$, $a_1^T = b_1$, $a_2 = b_2^T$, $a_2^T = b_2$.

In generale, data una matrice $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$ $A = [a_{ij}]$ la sua **trasposta** è una matrice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ $B = [b_{ij}]$ tale che

$$b_{ij} = a_{ji},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots n$$

Per esempio, l'elemento di posizione 32, nella trasposta avrà posizione 23 ossia ciascuna colonna diventa la corrispondente riga nella trasposta e viceversa. Ciò comporta che il numero di righe e di colonne risultino scambiati.

Esempio 25.2

$A = \begin{bmatrix} -1 & -1.1 & -1.21 \\ 3 & 3.3 & 3.63 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1.1 & 3.3 \\ -1.21 & 3.63 \end{bmatrix}$

Si osserva che $b_{11} = a_{11}, b_{21} = a_{12}, b_{31} = a_{13}, b_{12} = a_{21}, b_{22} = a_{22}, b_{32} = a_{23}$

quindi $A = B^T$, $A^T = B$.

Applicazione (passo 1)

La situazione del problema è rappresentata dalla tabella

a:	**Agricoltura**	**Industria**	**Famiglie**	**Totale**
da:				
Agricoltura	7,5	6	16,5	30 quintali di grano
Industria	14	6	30	50 metri di stoffa
Famiglie	80	180	40	300 ore-uomo di lavoro

La quantità prodotta dall'*i*-esimo settore e impiegata dal *j*-esimo può essere vista come l'elemento $q_{ij} \geq 0$ di una matrice quadrata di ordine 3 con la corrispondenza fra i beni e gli indici:

1 Agricoltura
2 Industria
3 Famiglie

La matrice ottenuta è $A = \begin{bmatrix} 7.5 & 6 & 16.5 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{bmatrix}$ dove alla colonna *j* corrispondono gli *input* del settore *j* e alla riga *i* corrispondono gli *output* del settore *i*.

Se inoltre la produzione totale dell'*i*-esimo settore si indica con q_i, si ha il vettore $q = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 300 \end{bmatrix}$.

Definizioni 25.2 - Operazioni elementari fra matrici

Due matrici $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ di dimensione $\boldsymbol{n \times m}$ si dice che

- sono **uguali** se $b_{ij} = a_{ij}$, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots n$ ossia tutti gli elementi sono uguali;
- una matrice $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ dimensione $\boldsymbol{n \times m}$ è la **somma *A* + *B*** se $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots n$ ossia ogni elemento di *C* è la somma degli elementi di *A* e *B* che occupano la stessa posizione;
  La somma gode delle proprietà
  - associativa *A*+(*B*+*C*) = (*A*+*B*)+*C*
  - commutativa *A*+*B* = *B*+*A*
  - elemento neutro *O*=[0]
- una matrice $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ dimensione $\boldsymbol{n \times m}$ è il **prodotto di un numero reale *k* per *A*** se $c_{ij} = ka_{ij}$, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots n$ ossia ogni elemento di *C* è il prodotto di *k* per l'elemento di *A* che occupano la stessa posizione;
- una matrice $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ dimensione $\boldsymbol{n \times m}$ è la **combinazione lineare di *A* e *B* con coefficienti gli scalari *h* e *k*** se $c_{ij} = ha_{ij} + kb_{ij}$, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots n$ ossia ogni elemento di *C* è la somma dei prodotti, rispettivamente di *h* e di *k*, per l'elemento di *A* e di *B* che occupano la stessa posizione;

Esempio 25.3

$A = \begin{bmatrix} -1 & -1.1 & -1.21 \\ 3 & 3.3 & 3.63 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ hanno come somma $C = \begin{bmatrix} 0 & -.1 & -.21 \\ 1 & 2.3 & 3.63 \end{bmatrix}$

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & -1.1 & -1.21 \\ 3 & 3.3 & 3.63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2.2 & -2.42 \\ 6 & 6.6 & 7.26 \end{bmatrix}$$

$$-0.5B = -0.5\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - 0.5B = \begin{bmatrix} -2.5 & -2.7 & -2.92 \\ 7 & 7.1 & 7.26 \end{bmatrix}$$

Definizione 25.3 - Prodotto righe per colonne fra matrici

Due matrici $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ si dice che sono **conformabili** se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda.
Siano ad esempio A matrice di dimensione $\boldsymbol{n \times m}$ e B è di dimensione $\boldsymbol{m \times p}$ (sono conformabili).
Allora si dice che

- una matrice $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ di dimensione $\boldsymbol{n \times p}$ è il **prodotto righe per colonne *A B*** se $c_{ij} = \sum_{h=1}^{m} a_{ih} b_{hj}$, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots n$ ossia ogni elemento c_{ij} di *C* è la somma dei prodotti degli elementi della riga *i*-ma *A* per i corrispondenti della colonna *j*-ma.

Il prodotto righe per colonne gode delle proprietà
- associativa ***A*(*BC*) = (*AB*)*C***
- distributiva **(*A*+*B*)*C* = *AC* + *BC*** e ***C*(*A*+*B*) = *CA* + *CB***
- della matrice nulla: ***AO*=*O***

Osservazione importante: il prodotto righe per colonne **non gode** delle proprietà
- commutativa ossia $AB \neq BA$ cioè **non si può scambiare l'ordine dei fattori**
- legge di annullamento del prodotto: ***AB*=*O* non implica *A*=*O* o *B*=*O***

Esempio 25.4

$A=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -5\\ 3 & -6\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ nel prodotto AB sono conformabili; infatti il numero di righe della matrice B è uguale al numero di colonne di A, il prodotto è una matrice quadrata di ordine 3; infatti il prodotto è $C = AB = \begin{bmatrix}0+4 & -1+0 & -1+4\\ 0-5 & 2+0 & 2-5\\ 0-6 & 3+0 & 3-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -1 & 3\\ -5 & 2 & -3\\ -6 & 3 & -3\end{bmatrix}$; è possibile calcolare B

$BA=\begin{bmatrix}2+3 & -5-6\\ -1+3 & 4-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -11\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ quindi $AB \neq BA$.

Esempio 25.5

$A=\begin{bmatrix}-1 & -1.1 & -1.21\\ 3 & 3.3 & 3.63\end{bmatrix}$ e $A^T = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1.1 & 3.3\\ -1.21 & 3.63\end{bmatrix}$ sono conformabili; infatti il numero di righe della matrice trasposta è uguale al numero di colonne di A, il prodotto è una matrice quadrata di ordine 2; infatti il prodotto $C = AA^T = \begin{bmatrix}3.6741 & -11.022\\ -11.022 & 33.067\end{bmatrix}$

Prodotto di MATRICI QUADRATE

Due matrici quadrate $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ entrambe di ordine ***n*** sono sempre conformabili sia nel prodotto AB che nel prodotto BA, entrambe i prodotti, in generale diversi, sono matrici quadrate di ordine ***n***.

In questo caso esiste l'**elemento neutro**: la matrice **identità** $\boldsymbol{I_n}$ di ordine ***n*** per cui $\boldsymbol{I_n A = A I_n = A}$.

Esempio 25.6

$A=\begin{bmatrix}8.1 & 3.6\\ 4.2 & 0.4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ essendo due matrici quadrate dello stesso ordine sono conformabili sia nel prodotto AB che nel prodotto BA, entrambe i prodotti sono matrici quadrate di ordine 2.

$AB=\begin{bmatrix}3.6 & 8.1\\ 0.4 & 4.2\end{bmatrix}$ le colonne sono scambiate

$BA=\begin{bmatrix}4.2 & 0.4\\ 8.1 & 3.6\end{bmatrix}$ le righe sono scambiate

Esempio 25.7

Anche $A=\begin{bmatrix}8.1 & 3.6\\ 4.2 & 0.4\end{bmatrix}$ e $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ sono conformabili, in questo caso si ha che

$$AI_2 = I_2 A = \begin{bmatrix}8.1 & 3.6\\ 4.2 & 0.4\end{bmatrix} = A$$

Esempio 25.8

Dato il vettore colonna $x=\begin{bmatrix}8.1\\ 4.2\end{bmatrix}$ e la matrice identità $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, x e I_2 sono conformabili nel prodotto $I_2 x = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8.1\\ 4.2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8.1\\ 4.2\end{bmatrix} = x$.

Mentre x^T e I_2 sono conformabili nel prodotto $x^T I_2 = [8.1 \quad 4.2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = [8.1 \quad 4.2] = x^T$.

Prodotto VETTORE- VETTORE
Due vettori sono conformabili in due casi:

- ***a*** e ***b*** vettori colonna di dimensione ***n*,** il **prodotto** $a^T b = b^T a = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ **è un numero reale.**
- ***a*** vettore colonna di dimensione ***n*** e ***b*** vettore colonna di dimensione ***m*** il **prodotto**

$$ab^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_m \end{bmatrix}$$ **è una matrice $n \times m$**

Esempio 25.9

Se $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 10\% \\ 70\% \\ 20\% \end{bmatrix}$ allora

- $ab = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.7 + 3 \cdot 0.2 = 2.1$
- $a^T b^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 1.4 & 0.4 \\ 0.3 & 2.1 & 0.6 \end{bmatrix}$

Esempio 25.10

Il vettore del prezzo unitario di un bene nei diversi mesi del 2009 è
$p = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 27.5 & 27.4 & 27.5 & 27.5 & 27.5 & 27.7 & 27.8 & 27.8 & 27.9 & 28 \end{bmatrix}^T$.
Calcolare la spesa per l'acquisto delle quantità riportate nel vettore
$x = \begin{bmatrix} 100 & 101 & 108 & 115 & 96 & 100 & 100 & 100 & 102 & 98 & 99 & 100 \end{bmatrix}^T$.

- La spesa complessiva è il prodotto $p^T x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ che può essere calcolato con Excel.

Esempio 25.11

Sia v il vettore dei voti di uno studente e w il vettore dei cfu di ognuno degli esami sostenuti, calcolare la media per il voto di laurea. Si tratta di una **media pesata**, ogni voto deve essere moltiplicato per il peso dato dai crediti e la somma di tali prodotti divisa per il totale di crediti.

Si osserva che il totale dei crediti è $\sum_{i=1}^{n} w_i = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = u^T w$ dove $u^T = [1 \dots 1]$.

- La media per voto di laurea è $\dfrac{v^T w}{u^T w} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$.

Esempio 25.12

Se $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ allora

- $a^T a = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
- $aa^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Esempio 25.13

Se $a = [1 \quad 2 \quad 3]^T$ e $b = [-2 \quad 1 \quad 0]^T$ allora

- $a^T b = [1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0$.

Osservazioni

1) Moltiplicare un vettore riga per il suo trasposto significa calcolare la somma dei quadrati degli elementi del vettore che si definisce come il quadrato della norma di ***a*:** $\|a\|^2 = a^T a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ quindi la **norma euclidea di *a*** è $\|a\| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.

2) A volte il prodotto vettore riga per vettore colonna è nullo cioè $a^T b = 0$, in questo caso si parla di **vettori ortogonali**.

Esempio 25.14

Un vettore di dimensione ***n*** può essere considerato un punto nello spazio a ***n*** dimensioni R^n.

- La distanza fra due punti x e y in R^2 è $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \|x - y\|$

Prodotto MATRICE-VETTORE

Il prodotto di una matrice $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ di dimensione $\boldsymbol{n \times m}$ e un **vettore colonna** a di dimensione ***m*** è un vettore colonna di dimensione ***n*.**

Esempio 25.15

Se $A = \begin{bmatrix} -1 & -1.1 & -1.21 \\ 3 & 3.3 & 3.63 \end{bmatrix}$ e $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ allora $Aa = \begin{bmatrix} -1 - 1.1 - 1.21 \\ 3 + 3.3 + 3.63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.31 \\ 9.93 \end{bmatrix}$ ogni elemento i è la somma della i-ma riga di A.

Applicazione (passo 2)

Utilizzando le operazioni fra matrici è possibile

- esprimere il vettore q del prodotto totale per ogni settore.

$$\begin{cases} q_1 = q_{11} + q_{12} + q_{13} \\ q_2 = q_{21} + q_{22} + q_{23} \\ q_3 = q_{31} + q_{32} + q_{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 & 6 & 16.5 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- estrarre le quantità consumate da un determinato settore

$$\begin{bmatrix} 7.5 \\ 14 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 & 6 & 16.5 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

- $$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 & 6 & 16.5 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}16.5\\30\\40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.5&6&16.5\\14&6&30\\80&180&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Prodotto VETTORE- MATRICE
Il prodotto un **vettore riga** *a* di dimensione ***n*** e di una matrice $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ di dimensione $\boldsymbol{n\times m}$ è un vettore riga di dimensione ***m*.**

Esempio 25.16
Se $a=[1\quad 1]$ $A=\begin{bmatrix}-1&-1.1&-1.21\\3&3.3&3.63\end{bmatrix}$ allora
$aA=[-1+3\quad -1.1+3.3\quad -1.21+3.63]=[2\quad 2.2\quad 2.42]$ ogni elemento *j* è la somma della *j*-ma colonna di *A*.

Applicazione (passo 3)
Utilizzando il prodotto vettore-matrice è possibile

- calcolare il vettore dei prezzi pagati da ogni settore a partire dal vettore $p=[p_i]$ dove p_i è il prezzo del prodotto dell'*i*-esimo settore.

$$p^TA=[p_1\quad p_2\quad p_3]\begin{bmatrix}7.5&6&16.5\\14&6&30\\80&180&40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.5p_1+14p_2+80p_3\\6p_1+6p_2+180p_3\\16.5p_1+30p_2+40p_3\end{bmatrix}^T$$

Per esempio se i prezzi sono: 20 euro per un quintale di grano, 15 euro per un metro di stoffa, 3 euro per un anno-uomo di lavoro, usando il vettore $p=\begin{bmatrix}20\\15\\3\end{bmatrix}$ si ha che l'esborso di ogni settore è:

$$p^TA=[20\quad 15\quad 3]\begin{bmatrix}7.5&6&16.5\\14&6&30\\80&180&40\end{bmatrix}=$$

$$=[150+210+240\quad 120+90+540\quad 330+450+120]=[600\quad 750\quad 900].$$