Lezione 26 – **Matrici particolari, determinante e loro proprietà**

26.1 Problema dei prezzi

Si è visto come il vettore degli esborsi a partire dal vettore $p = [p_i]$ dove p_i è il prezzo del prodotto dell'i-esimo settore è $p^T A$,vettore riga.

Per esempio $p^T A = [20 \quad 15 \quad 3]\begin{bmatrix} 7.5 & 6 & 16.5 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150+210+240 \\ 120+90+540 \\ 330+450+120 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 600 \\ 750 \\ 900 \end{bmatrix}^T$.

Poiché anche $\begin{bmatrix} 30 \cdot 20 \\ 15 \cdot 50 \\ 3 \cdot 300 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_1 p_1 \\ q_2 p_2 \\ q_3 p_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 600 \\ 750 \\ 900 \end{bmatrix}$ si può dire che il vettore $p = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}$ garantisce l'equilibrio degli scambi tra i diversi settori .

Ci si chiede "Come è possibile determinare tale vettore partendo dalle quantità prodotte da ciascun settore rappresentate nel vettore q=[q_i]? Esistono altri vettori dei prezzi che hanno la stessa caratteristica?".

Definizione 26.1 -Matrici diagonali e triangolari

Una matrice quadrata di ordine n viene detta **matrice triangolare superiore (inferiore)** se

$$a_{ij} = 0, i = 1,\dots n, j = 1,\dots n, i > j \ (i < j)$$

Una matrice quadrata di ordine n viene detta **matrice diagonale** se

$$a_{ij} = 0, i = 1,\dots n, j = 1,\dots n, i \neq j$$

Una matrice diagonale viene indicata con diag(a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn})

Se due matrici A e B sono diagonali e $k \in R$.

- kA= diag(ka_{11} , ka_{22} ,…, ka_{nn})
- $A + B$ = diag(a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn}) + diag(b_{11} , b_{22} ,…, b_{nn}) = diag($a_{11}+b_{11}$, $a_{22}+b_{22}$,…, $a_{nn}+b_{nn}$)
- AB = diag(a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn}) diag(b_{11} , b_{22} ,…, b_{nn}) = diag($a_{11}b_{11}$, $a_{22}b_{22}$,…, $a_{nn}b_{nn}$)
- A^p = diag($a_{11}{}^p$, $a_{22}{}^p$,…, $a_{nn}{}^p$)

Esempio 26.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

26.1 Applicazione (passo 1)

Se $p = [p_i]$ è il vettore dei prezzi di produzione e q=[q_i] è il vettore delle quantità prodotte dai diversi settori, il prezzo della produzione del settore i-mo è $p_i q_i$, quindi deve essere $p^T A = [p_i q_i]^T$

Il vettore $[p_i q_i]$ non può essere scritto come prodotto vettore-vettore, bisogna utilizzare il prodotto matrice-vettore scegliendo la matrice A in modo tale che il prodotto del vettore $p = [p_i]$ per l'i-ma riga di A sia $p_i q_i$. La matrice è una diagonale D = diag[q_1, q_2, q_3];

infatti $Dp = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \\ p_3 q_3 \end{bmatrix}$. Quindi si ha $p^T A = [p_i q_i]^T = (Dp)^T$.

Definizione 26.2 - Matrice trasposta

La **trasposta** di una matrice $\boldsymbol{n \times m}$ $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ è una matrice $\boldsymbol{m \times n}$ $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ tale che

$$a_{ij} = b_{ji},\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots m$$

B viene indicata con A^T.

Se due matrici A e B hanno la stessa dimensione, l'operazione di trasposizione gode delle proprietà:

- $(A^T)^T = A$ **(proprietà involutiva)**
- $(hA + kB)^T = hA^T + kB^T$

Se due matrici A e B sono conformabili, l'operazione di trasposizione gode delle proprietà:

- $(AB)^T = B^T A^T$

Esempio 26.2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

26.1 Applicazione (passo 2)

Nella matrice $A = \begin{bmatrix} 7.5 & 6 & 16.5 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{bmatrix}$ alla colonna *j* corrispondono gli *input* del settore *j* e alla riga *i* corrispondono gli *output* del settore *i*.

Il vettore degli esborsi si può anche scrivere come vettore colonna facendone il trasposto: $\left(p^T A\right)^T = A^T p$ e la relazione con la matrice D diventa $A^T p = Dp$ ossia $\left(A^T - D\right)p = \underline{0}$.

In questo caso si considera la matrice $A^T = \begin{bmatrix} 7.5 & 14 & 80 \\ 6 & 6 & 180 \\ 16.5 & 30 & 40 \end{bmatrix}$ dove alla colonna *j* corrispondono gli *output* del settore *j* e alla riga *i* corrispondono gli *input* del settore *i*.

Problema 26.2
Sia dato un polinomio di 2° grado omogeneo con due variabili, queste possono essere rappresentate in un vettore colonna 2×1, che per comodità scriviamo come trasposto di un vettore riga: $x = [x_1 \quad x_2]^T$.
Per esempio si consideri il polinomio: $P_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$
Ci si chiede **"E' possibile scrivere un polinomio di 2° grado omogeneo come prodotto del vettore *x* e di una matrice quadrata *A*?"**.
La domanda sembra poco utile ma in seguito vedremo che non lo è!

Definizione 26.3 - Matrice simmetrica

Una matrice quadrata di ordine *n* viene detta **matrice simmetrica** se

$$a_{ij} = a_{ji}, i = 1,\dots n, j = 1,\dots n$$

Se due matrici quadrate *A* e *B* di ordine *n* sono **simmetriche** e $k \in R$ valgono le seguenti proprietà

- kA è simmetrica
- $A = A^T$
- una **matrice diagonale** è sempre simmetrica
- $A + B$ è simmetrica
- Se AB è commutativo allora AB è simmetrica.
- A^p è simmetrica

Esempio 26.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 12 & -7 & 6 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Per una matrice *A* **non necessariamente simmetrica** valgono le seguenti proprietà

- se *A* è una matrice quadrata allora $A + A^T$ è simmetrica
- AA^T è sempre simmetrica.

Esempio 26.4

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ la somma $C = A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ è una matrice simmetrica.

Esempio 26.5

$A = \begin{bmatrix} -1 & -1.1 & -1.21 \\ 3 & 3.3 & 3.63 \end{bmatrix}$ e $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1.1 & 3.3 \\ -1.21 & 3.63 \end{bmatrix}$ sono conformabili; infatti il numero di righe della matrice trasposta è uguale al numero di colonne di *A*, il prodotto è una matrice quadrata di ordine 2, il prodotto $C = AA^T = \begin{bmatrix} 3.6741 & -11.022 \\ -11.022 & 33.067 \end{bmatrix}$ è una matrice simmetrica.

Applicazione 26.1 (passo 1)

Si osserva che, dato un generico vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e una matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, il prodotto $x^T A$ è un vettore riga e il prodotto Ax è un vettore colonna quindi non possono essere uguali ad un polinomio.
Il prodotto $x^T Ax$ si può calcolare perché $x^T A$ (vettore riga 1×2) è conformabile con $\underline{x}$ (vettore colonna 2×1), il risultato è uno scalare (polinomio di 2° grado omogeneo); infatti

$$x^T Ax = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = .$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + (a_{11} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$
.

Se si vuole che il polinomio: $P_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ sia uguale a $x^T Ax$, bisognerà scegliere opportunamente gli elementi di A in modo che $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = a_{11}x_1^2 + (a_{11} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ per ogni vettore x.
Bisognerà quindi scegliere: $a_{11} = 1, a_{11} + a_{21} = 2, a_{22} = 1$ quindi a_{11} e a_{21} possono essere scelti in infiniti modi, basta che la somma non cambi; per esempio $a_{11} = 0, a_{21} = 2$ oppure $a_{11} = -1, a_{21} = 3$. Se si impone che A sia simmetrica si sceglierà $a_{11} = a_{21} = 1$ e la matrice cercata sarà $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

In conclusione: il prodotto $x^T A$ o Ax è un vettore quindi non è possibile scrivere un polinomio come prodotto matrice-vettore o vettore-matrice, tuttavia **è sempre possibile scrivere un polinomio di 2° grado omogeneo come il prodotto x^TAx dove A è una matrice quadrata di ordine uguale alla dimensione del vettore x.**
La matrice A che verifica l'uguaglianza è unica se si impone che sia simmetrica.

Esempio 26.6

$$x^T Ax = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$
$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_3 = x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Osservazione: poiché la matrice A è simmetrica, il polinomio di 2° grado ha gli elementi della diagonale principale come coefficienti delle potenze x_1^2, x_2^2, x_3^2 e come coefficienti dei termini misti x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 il doppio degli elementi corrispondenti nella parte superiore (o inferiore) della matrice.

Problema 26.3 Calcolo area del parallelogramma

Se due *a* e *b* vettori positivi di R^2 sono i lati di un parallelogramma, conoscendo i due vettori è possibile calcolare l'area del parallelogramma?
Facendo ragionamenti geometrici la risposta è ovviamente affermativa. Si vuole calcolare tale area solo per via algebrica cioè usando unicamente le componenti dei due vettori.

Definizione 26.4 - Determinante di una matrice quadrata

Data una matrice quadrata $A=[a]$ di ordine 1, si definisce **determinante di *A*** così: det A = a.

Data una matrice quadrata A di ordine n>1, il **determinante di *A*** si definisce in modo ricorsivo:

1. si sceglie una riga o una colonna;

2. per ogni elemento a_{ij} della riga o colonna scelta si calcola il determinante della sottomatrice A_{ij} ottenuta cancellando la riga i e la colonna j ;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj-1} & a_{nj+1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

det A_{ij} = | A_{ij}| tale determinante è chiamato **minore complementare**;

3. si calcola la somma dei prodotti di ogni elemento a_{ij} della riga o colonna scelta per il suo **complemento algebrico** indicato con m_{ij} ossia il minore complementare moltiplicato per $(-1)^{i+j}$, in formule $m_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$

rispetto alla riga i: $\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}m_{ij}$

rispetto alla colonna j: $\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}m_{ij}$.

Osservazione

Il calcolo di una matrice di ordine n si esegue calcolando n minori complementari di ordine n-1. Per ognuno di essi si calcolano n-1 minori di ordine n-2, e così via fino ad ottenere minori di ordine 1. Complessivamente, in generale, per calcolare il determinante di ordine n si dovranno impostare $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$ determinanti di ordine decrescente.
E' quindi ***importante*** scegliere la riga o la colonna rispetto alla quale sviluppare il determinante in modo che ci sia il numero maggiore possibile di 0 perché i minori complementari corrispondenti agli elementi nulli non vanno calcolati.

Esempio 26.7

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=-10-12=-22$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 3=-3$$, determinate sviluppato rispetto alla prima riga

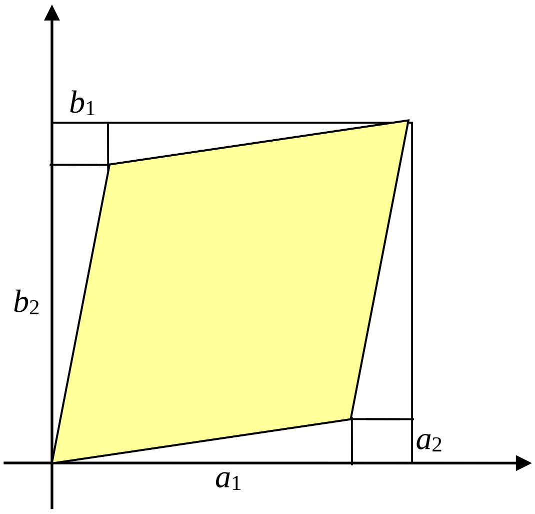
$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$,determinate sviluppato rispetto alla prima colonna

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$, determinate sviluppato rispetto alla terza riga

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) =$$
$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

Applicazione 26.3

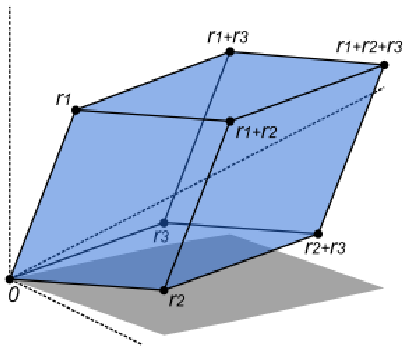
Se i vettori positivi sono $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, il parallelogramma è quello in figura



Facendo ragionamenti geometrici l'area è:
$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - 2a_2 b_1 - a_1 a_2 - b_1 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Si osserva che $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ossia l'area del parallelogrammo è il determinante della matrice ottenuta accostando i vettori colonna *a* e *b*!

Questo vale anche in altre dimensioni, per esempio il volume del parallelepipedo in figura



è dato dal determinante della matrice ottenuta accostando i tre vettori: $V = \begin{vmatrix} r1 & r2 & r3 \end{vmatrix}$

Teoremi 26.1 - Proprietà del determinante di una matrice quadrata

Data una matrice quadrata A di ordine n, k scalare

1. $\det(A^T) = \det A$

2. se gli elementi di una colonna o una riga sono tutti nulli $\det A = 0$

3. moltiplicando una riga o una colonna per k, il determinante diventa $k \det A$

4. moltiplicando una matrice per k, il determinante diventa $k^n \det A$ ossia $\det(kA) = k^n \det A$.

5. se A è una matrice triangolare o diagonale allora $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Date due matrici quadrate A e B di ordine n,

6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ***teorema di Binet*** dal quale si ricava la proprietà: $\det(A^p) = (\det A)^p$, p numero intero.

Esempio 26.8

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22 \quad , \ \det A^T = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -22$$

Esempio 26.9

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 2(-10-12) = -44$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 22$$

Esempio 26.10

$$\det AB = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = -22\cdot(-2) = 44$$

Esempio 26.11

$$\det A^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22\cdot(-22) = 484$$

Teoremi 26.2 - Altre proprietà del determinante di una matrice quadrata

7. Il determinante di una matrice quadrata A è nullo ossia **det** $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ se

a) una riga (colonna) è formata da tutti zeri;

b) la i –ma riga (colonna) è ottenuta moltiplicando la j-ma riga (colonna) per k ossia se due righe sono proporzionali. In particolare se A ha due righe uguali allora $\det A = 0$;

c) una riga (colonna) è ottenuta come combinazione lineare delle altre righe (colonne).

8. Date due matrici quadrate A e B di ordine n,

a) se le righe (colonne) di A e di B sono tutte uguali ad eccezione della i-ma allora $\det A + \det B = \det C$ dove C ha le stesse righe (colonne) di A e B ad eccezione della i-ma che è somma della i-ma di A con la i-ma di B.

b) dalle proprietà 7.a e 8.a si deduce che se la matrice B è ottenuta sostituendo la j –ma riga (colonna) di A con la sua somma con l'i –ma riga (colonna) moltiplicata per k allora $\det B = \det A$.

c) se la matrice B è ottenuta scambiando due righe o colonne di A allora $\det A = - \det B$.

Esempio 26.12

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}=0$$ infatti la terza riga è ottenuta moltiplicando la prima per 26.

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 7\end{bmatrix}=0$$ infatti la terza riga è ottenuta sommando la prima e la seconda.

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}=0$$ infatti la terza riga è ottenuta sommando la prima moltiplicata per 3 e la seconda moltiplicata per -1.

Esempio 26.13

$$\det A=\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=-14+11=-3 \text{ e } \det B=\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 2 & 5 & 5\end{bmatrix}=-25+22=-3$$ infatti la terza riga di B è ottenuta sommando alla terza riga di A la prima riga.

Inoltre $\det A+\det B=\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 3 & 8 & 7\end{bmatrix}=-6$; infatti differiscono solo per la terza riga.

Esempio 26.14

$$\det A=\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=-3 \text{ e } \det B=\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}=3=-\det A$$ infatti la seconda e terza riga di B sono rispettivamente uguali alla terza e seconda di A ossia due righe sono scambiate.

$$\det B=\det\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=3=-\det A$$ infatti la prima e seconda colonna di B sono rispettivamente uguali alla seconda e prima di A ossia due colonne sono scambiate.