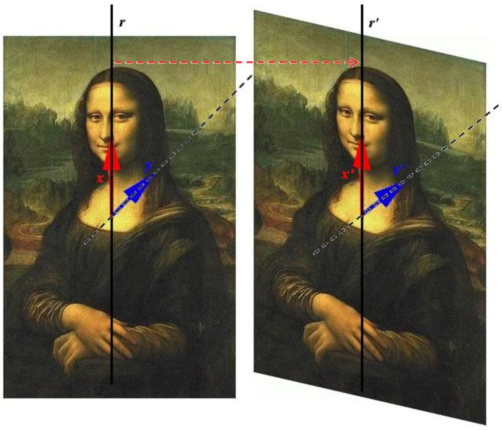
Lezione 27 – **Matrice inversa**

27.1 Il problema del quadro deformato



Il quadro della Gioconda si è deformato, ci si chiede: "Come è possibile descrivere questa deformazione? E' possibile riportarlo allo stato originario e come?"

Definizione 27.1 - Matrice inversa di una matrice quadrata

Siano A e B due matrici quadrate di ordine n, B viene detta **matrice inversa destra (sinistra) di A** se

$$AB = I \quad (BA = I)$$

Se la matrice B è inversa destra di A è anche inversa sinistra e si indica con il simbolo A^{-1}, quindi si ha $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Una matrice A quadrata invertibile si dice **non singolare.**

Esempio 27.1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ha come inversa $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; infatti $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ e $\det B = 1$.

Teoremi 27.1 - Proprietà della matrice inversa

Una matrice A quadrata di ordine n non singolare quindi invertibile gode delle proprietà:

- $(A^{-1})^{-1} = A$ (**proprietà involutiva**); infatti $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ quindi A è l'inversa di A^{-1}.
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$; infatti $I = I^T = \left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T A^T$ quindi A^T è l'inversa di $(A^{-1})^T$.
- se k è uno scalare diverso da 0 allora kA è invertibile; infatti $\det kA = k^n \det A \neq 0$.
- se p è un intero allora A^p è invertibile; infatti $\det(A^p) = (\det A)^p \neq 0$.
- se A è una matrice diagonale ossia $A = diag\left(a_1, \cdots, a_n\right)$ allora necessariamente $a_i \neq 0 \, \forall i$ e $A^{-1} = diag\left(\frac{1}{a_1}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$; infatti se chiamiamo b_{ij} gli elementi dell'inversa deve risultare $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_{11} & \cdots & a_1 b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_{n1} & \cdots & a_n b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ quindi solo gli elementi della diagonale sono diversi da 0 ($b_{ii} \neq 0, b_{ij} = 0 \; se \; i \neq j$) e tali per cui $a_i b_{ii} = 1$.
- se A è simmetrica anche A^{-1} è simmetrica; infatti $\left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(A^{-1}\right)^T A = I$ quindi, poiché l'inversa di A è unica, $\left(A^{-1}\right)^T = A^{-1}$ cioè A^{-1} è simmetrica.

Se due matrici quadrate A e B di ordine n sono invertibili allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; infatti si osserva che $B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}I$ e, ponendo $I = (AB)(AB)^{-1}$, si ottiene

$$B^{-1}A^{-1}I = B^{-1}A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = B^{-1}(A^{-1}A)B(AB)^{-1} = B^{-1}IB(AB)^{-1} = I(AB)^{-1} = (AB)^{-1}$$

Osservazione: c'è un'analogia fra
le proprietà $(A^{-1})^{-1} = A$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e quelle della trasposta $(A^T)^T = A$ e $(AB)^T = B^TA^T$, ma questo non significa che coincidano.
Una matrice A per cui vale $A^{-1} = A^T$ cioè $A^TA = AA^T = I$ si dice **matrice ortonormale**, le colonne (righe) di A sono ortogonali ossia $a_i^Ta_j = 0, i \neq j$ e $a_i^Ta_i = \|a_i\| = 1, i = 1,2,\cdots,n$.

Se $A^TA = AA^T$ è una matrice diagonale allora A si dice **ortogonale**, in questo caso non necessariamente la norma dei vettori riga o colonna è 1.

Esempio 27.2

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ sono invertibili

$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ la matrice inversa è $C^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$; infatti

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ha come inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; infatti $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ha come inversa $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; infatti $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Esempio 27.3

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ è ortogonale; infatti è simmetrica e $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrice diagonale.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ non è ortogonale; infatti $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ matrice diagonale ma $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ non diagonale.

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ è ortonormale; infatti è simmetrica e $AA^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrice identità.

Teorema 27.2 Calcolo della matrice inversa
Una matrice A quadrata è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$
Dimostrazione $\Rightarrow$

A quadrata è invertibile implica det $A \neq 0$; infatti se A^{-1} esiste, per il teorema di Binet $\det\left(AA^{-1}\right) = \det A \det A^{-1} = 1$ se ne deduce l'impossibilità che sia det A =0**.** Inoltre si può dedurre che, qualora sia $\det A \neq 0$, $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Dimostrazione $\Leftarrow$
A quadrata con $\det A \neq 0$ implica A invertibile; per dimostrarlo si costruisce la matrice inversa di una matrice A quadrata di ordine n non singolare nel seguente modo:

1) si calcola il determinante di A verificando che sia diverso da 0;
2) da A si ottiene la matrice B sostituendo ad ogni elemento a_{ij} con il suo complemento algebrico: $m_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Si ricorda che A_{ij} è la sottomatrice ottenuta cancellando la i-ma riga e la j-ma colonna di A
$$B = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} = \left[m_{ij}\right], m_{ij} \in R, i, j = 1, \dots n$$
3) si calcola $\boldsymbol{A^* = B^T}$ detta **matrice aggiunta**
4) infine $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$.

Si dimostra che la matrice A^{-1} così ottenuta è proprio l'inversa di A.
Si parte calcolando
$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & \cdots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \cdots & m_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$
Si osserva che

- il prodotto della riga i-ma con la colonna i-ma è uguale a det$A$; infatti $a_{11}m_{11} + \cdots + a_{1n}m_{1n} = a_{21}m_{21} + \cdots + a_{2n}m_{2n} = \ldots = a_{n1}m_{n1} + \cdots + a_{n1n}m_{nn} = \det A$
- il prodotto della riga i-ma con la colonna j-ma, $i \neq j$ è uguale a 0; infatti per il 2° teorema di Laplace, $\sum_{l=1}^{n} a_{il} m_{jl} = 0, i \neq j$ e $\sum_{l=1}^{n} a_{li} m_{lj} = 0, i \neq j$ ossia il prodotto di una riga (colonna) per il complemento algebrico di un'altra riga (colonna) è nullo.

Da quanto detto si ricava che $AA^* = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot I$

Dividendo per det$A$≠0 si ha che $A\left(\dfrac{1}{\det A} A^*\right) = I$ quindi $\dfrac{1}{\det A} A^*$ è l'inversa di A e, in quanto viene generata in un unico modo, tale matrice è unica .

Esempio 27.4

Vediamo come si è calcolata l'inversa della matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dell'es. 27.2

1) det C = -1 è diverso da 0

2) $B=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3) la **matrice aggiunta** è $C^* = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

4) $C^{-1} = \dfrac{1}{\det C} C^* = (-1)\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Esempio 27.5

Calcolare l'inversa della matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

1) det A =10 è diverso da 0

2) $B=\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

3) la **matrice aggiunta** è $A^* = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$

Osservazione: la matrice inversa di una matrice triangolare superiore (inferiore) è triangolare superiore (inferiore).

Esempio 27.6

Calcolare l'inversa della matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

1) det A = -8 è diverso da 0

2) $B=\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 12 & 4 & -4 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

3) la **matrice aggiunta** è $A^* = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 12 & 4 & -4 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 12 & -6 \\ 4 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

4) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = -\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 12 & -6 \\ 4 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Esempio 27.7

Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

1) det A =0 quindi la matrice non è invertibile.

27.1 Applicazione

Introducendo un sistema di assi cartesiani in modo che le rette *r* e *r'* coincidano con l'asse delle ordinate, il quadro si può rappresentare come un insieme punti del piano cartesiano, la deformazione si può quindi vedere come una variazione delle componenti dei vettori secondo una legge del tipo $\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x' = Ax$ dove $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ detta trasformazione geometrica.

Osservando che nella trasformazione l'ascissa non cambia mentre l'ordinata si decrementa proporzionalmente all'ascissa, si verifica empiricamente che la corrispondenza è data dalla relazione $x' = Ax$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}$ con *k*>0, potremmo scegliere *k*=2.

A questo punto ci si può chiedere: "esiste e qual è la trasformazione che riporta la figura alla sua forma originaria?".

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ quindi *A* è una matrice non singolare cioè invertibile quindi moltiplicando a sinistra per A^{-1} la relazione $x' = Ax$ si ottiene la relazione $A^{-1}x' = x$ che permette di riportare ogni punto del quadro allo stato originario.

Usando il teorema 27.2 si calcola l'inversa di *A*: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e si può verificare che nella trasformazione

- al punto $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ corrisponde $x' = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

  e che a $x' = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ corrisponde $A^{-1}x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- al punto $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ corrisponde $x' = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

  e che a $x' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ corrisponde $A^{-1}x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ecc.