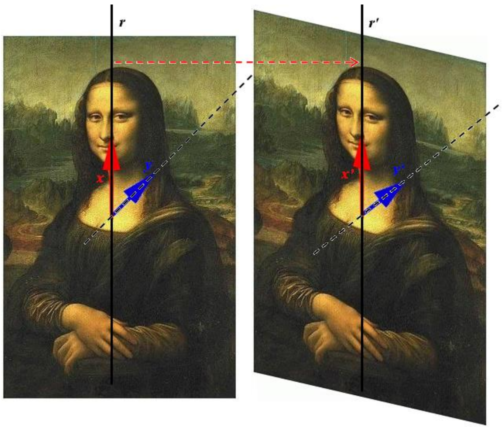
Lezione 28 – **Spazi lineari e rango**

28.1 Il problema del quadro deformato



Nella lezione 27 si è visto come il quadro della Gioconda deformato, può essere descritto da una trasformazione geometrica del tipo $x' = Ax$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}$ con $k>0$.

Ci si chiede: "In quali insiemi è possibile descrivere questo tipo di trasformazioni con operazioni fra matrici?"

28.1 Definizione di Spazi vettoriale o lineare

Uno spazio vettoriale o lineare è un insieme V in cui sono definite due operazioni:

- Addizione: dati due elementi qualsiasi $v, w \in V$ è definito $v + w \in V$. Tale operazione deve godere delle proprietà classiche (commutativa, associativa, elemento neutro, opposto)
- Moltiplicazione per un valore numerico: dato un elemento qualsiasi $v \in V$ e un qualsiasi valore $k \in R$ è definito $kv \in V$. Tale operazione deve godere delle proprietà classiche (commutativa, associativa, elemento neutro, distributive: $k(v+w) = kv + kw$, $(k+h)v = kv + hv$).

Gli elementi di uno spazio vettoriale o lineare sono detti **vettori.**
L'insieme R dei numeri reali è uno spazio vettoriale, gli elementi di R sono vettori ad una componente che si dico anche **scalari.**

Osservazione: in generale gli scalari possono essere presi in un campo numerico qualsiasi, non necessariamente R, per esempio il campo complesso. In seguito useremo come campo numerico R.

Esempi 28.1

L'insieme V delle funzioni continue da R in R è uno spazio vettoriale o lineare; infatti

- date $f, g : R \to R$ continue la funzione somma $f + g : R \to R$ definita come $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ è continua;
- data $f : R \to R$ continua e $k \in R$ la funzione $kf : R \to R$ definita come $(kf)(x) = kf(x)$ è continua.

L'insieme V delle matrici di ordine n è uno spazio vettoriale o lineare; infatti

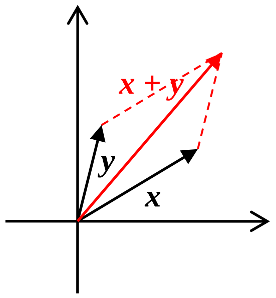
- date A, B matrici di ordine n è definita la matrice somma $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ di ordine n;
- data A matrice di ordine n e $k \in R$ è definita la matrice $kA = [ka_{ij}]$ di ordine n.

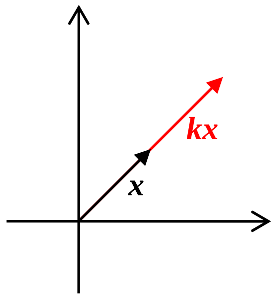
L'insieme V delle n-uple ordinate di numeri reali ossia R^n è uno spazio vettoriale o lineare; infatti

- dati $x, y \in R^n$ è definita la $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ n-upla ordinata di numeri reali ossia $x + y \in R^n$;

- dato $x \in R^n$ e $k \in R$ il prodotto $kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$ n-upla ordinata di numeri reali ossia $kx \in R^n$.

  In particolare, $x, y \in R^2$ sono due vettori del piano cartesiano che corrispondono al concetto di vettore come oggetto caratterizzato da modulo, direzione e verso così come viene definito in Fisica. Le due operazioni corrispondono rispettivamente alla somma di due vettori con la regola del parallelogramma e al prodotto di un vettore per uno scalare (cambio di scala o omotetia):



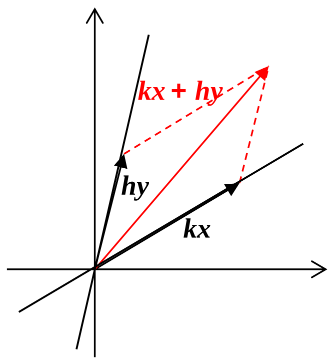


Osservazione: se $x \in R^n$ viene visto come vettore colonna ossia

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1 \ x_2 \ldots x_n]^T$$

le operazioni sono le stesse definite per le matrici quindi agli elementi di R^n si possono applicare le stesse proprietà viste per i vettori colonna (riga).

Per esempio si può calcolare la **combinazione lineare** $kx + hy \in R^n$, $k, h \in R$,



eseguire le moltiplicazioni vettore-vettore, matrice-vettore, vettore- matrice.

Esempi 28.2

$x = (1,2,-1) \in R^3, y = (4,-2,0) \in R^3$ possono essere rappresentati come

$x = [1 \quad 2 \quad -1]^T, y = [4 \quad -2 \quad 0]^T$ e si possono fare le operazioni:

- combinazione lineare: $kx + hy = k[1 \quad 2 \quad -1]^T + h[4 \quad -2 \quad 0]^T = [k+4h \quad 2k-2h \quad -k]^T$

- moltiplicazione vettore riga-vettore colonna: $x^T y = [1 \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

  è detto **prodotto scalare**, viene indicato anche così: $\langle x, y \rangle$

  Nel caso in cui $\langle x, y \rangle = 0$ i due vettori si dicono ortogonali;

- moltiplicazione matrice-vettore: $Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

- moltiplicazione vettore-matrice: $x^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$.

28.2 Definizione di Sottospazio vettoriale o lineare

Un insieme K che sia sottoinsieme proprio di uno spazio vettoriale o lineare V e che sia esso stesso uno spazio vettoriale o lineare rispetto alle stesse operazioni di V è detto **sottospazio vettoriale.**

Una ***condizione necessaria*** affinché K sia sottospazio di V è che contenga il vettore nullo di V; infatti se K è sottospazio di V allora

$$x \in K \Rightarrow -x \in K \Rightarrow x - x = 0 \in K \subset V .$$

Esempi 28.3

$K = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale o lineare di R^2 infatti $K \subset R^2$ e i vettori di K sono del tipo $(a,-a)$ quindi la somma

- $x + y = (x_1,-x_1) + (y_1,-y_1) = (x_1 + y_1,-(x_1 + y_1)) \in K$
- $kx = k(x_1,-x_1) = (kx_1,-kx_1) \in K$

Non bastava solo dire che $(0,0) \in K$; infatti la condizione è solo necessaria ma non sufficiente.

$K = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 = 1\}$ **non** è un sottospazio vettoriale o lineare di R^2 infatti $K \subset R^2$ ma i vettori di K sono del tipo $(a,-a+1)$ quindi la somma

- $x + y = (x_1,-x_1 + 1) + (y_1,-y_1 + 1) = (x_1 + y_1,-(x_1 + y_1) + 2) \notin K$
- $kx = k(x_1,-x_1 + 1) = (kx_1,-kx_1 + k) \notin K$ se $k \neq 0$

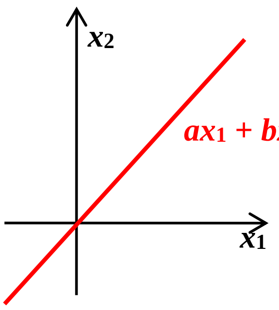
Bastava anche solo dire che $0 \notin K$ quindi la condizione necessaria non è verificata.

$K = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 - x_2 = 0\}$ **non** è un sottospazio vettoriale o lineare di R^2 infatti $K \subset R^2$ ma i vettori di K sono del tipo (a, a^2) quindi la somma

- $x + y = (x_1, x_1^2) + (y_1, y_1^2) = (x_1 + y_1, x_1^2 + y_1^2) \notin K$; infatti $x_1^2 + y_1^2 \neq (x_1 + y_1)^2$
- $kx = k(x_1, x_1^2) = (kx_1, kx_1^2) \notin K$ se $k \neq 0$

Non bastava solo dire che $(0,0) \in K$; infatti la condizione è solo necessaria ma non sufficiente.

Osservazione: i sottospazi vettoriali di R^2 sono tutte e sole le rette per l'origine; infatti la relazione fra x_1 e x_2 deve essere di primo grado e omogenea ossia del tipo $ax_1 + bx_2 = 0$.



28.3 Definizione di Insieme di generatori di uno spazio vettoriale o lineare

Per la definizione di spazio vettoriale, dati k elementi $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)} \in V$ spazio vettoriale o lineare, una qualunque combinazione lineare con coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ appartiene a V e si scrive:

$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_k v^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^{(i)} \in V$$

Si verifica facilmente che l'insieme K di tutte le possibili combinazioni lineari dei $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)} \in V$ è un sottospazio vettoriale o lineare di V.
Si dice che $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)} \in V$ è un **insieme di generatori di K** ossia ogni elemento di K si può ottenere come combinazione lineare dei k vettori dell'insieme di generatori.

Esempi 28.4

$K = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 = 0\}$ è generato dal vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; infatti i vettori di K sono del tipo $(a, -a)$ e si può scrivere $\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ quindi $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di K.

Non è l'unico; infatti si sarebbe potuto scegliere $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ oppure $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ per il quale si ha $\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Domanda chiave

Come si può determinare un insieme minimo di generatori di uno spazio vettoriale?

Risposta

Si utilizza, come vedremo in seguito, i concetti di **base** e **dimensione** di uno spazio vettoriale.

28.4 Definizioni di Dipendenza e indipendenza lineare

I vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)} \in V$ si dicono **linearmente dipendenti** se almeno uno di essi (senza perdere di generalità sia $v^{(1)}$) si può scrivere come **combinazione lineare** degli altri ossia esistono k-1 scalari $\alpha_2, \cdots, \alpha_k$ per cui vale:

$$v^{(1)} = \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_k v^{(k)} = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v^{(i)}$$

I vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)} \in V$ si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti ossia nessuno di essi si può scrivere come **combinazione lineare** degli altri.

Valgono le seguenti proprietà:

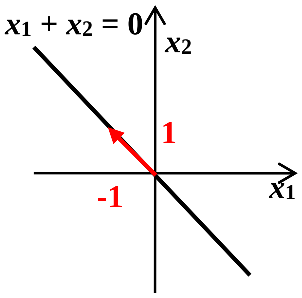
- Se all'insieme di vettori appartiene il vettore nullo 0 allora i vettori sono linearmente dipendenti; infatti il vettore nullo si ottiene scegliendo tutti i coefficienti nulli.
- Se l'insieme di vettori contiene un sottoinsieme di vettori linearmente dipendenti allora i vettori sono linearmente dipendenti.
- Se un insieme è formato da vettori linearmente indipendenti allora ogni sottoinsieme non vuoto è formato da vettori linearmente indipendenti.
- I vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)} \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se
$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_k v^{(k)} = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0;$$

infatti, se fosse $\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_k v^{(k)} = \underline{0}$ con $\alpha_1 \neq 0$ si avrebbe $v^{(1)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v^{(2)} - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} v^{(k)}$ quindi i vettori sarebbero linearmente dipendenti. Viceversa se $\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_k v^{(k)} = \underline{0}$ solo con $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ allora nessun vettore si può esprimere come combinazione lineare degli altri (si dovrebbe eseguire la divisione per 0!) quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

Si dice che $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)} \in V$ è una **base di un sottospazio vettoriale K se è un insieme di generatori linearmente indipendenti**.

Esempi 28.5

Si è visto che $K = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 = 0\}$ può essere generato dagli insiemi $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ oppure $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, mentre il primo, essendo formato da un solo vettore, è composto banalmente da vettori linearmente indipendenti, il secondo e il terzo no; infatti $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ quindi in entrambi gli insiemi tutti i vettori possono essere espressi come combinazione lineare di uno di essi. Si può dire che $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ è una base di *K*.



28.5 Basi di uno spazio vettoriale o lineare

Un insieme di vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)}$ è una **base di uno spazio vettoriale V** se

1. $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)}$ **sono linearmente indipendenti** e
2. ogni elemento di V si può esprimere come combinazione lineare di essi:

$$\forall w \in V \; \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in R \text{ tali che } w = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_k v^{(k)}$$

Sia V uno spazio vettoriale, valgono le seguenti proprietà:

- se $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)}$ è un insieme di generatori di *V* non tutti nulli allora si può estrarre da essi un sottoinsieme che sia una base di *V*.
- se $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)}$ è una base di *V* e *w* è una combinazione lineare di essi con $\alpha_i \neq 0$, allora l'insieme $v^{(1)}, \cdots, v^{(i-1)}, w, v^{(i+1)}, \cdots, v^{(k)}$ ottenuto sostituendo l'*i*-mo vettore, è una base di *V*.
- se $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)}$ è una base di *V* ogni insieme con *h* vettori e *h*>*k* è un insieme di generatori ma non è una base.
- se una base di *V* è formata da *k* vettori allora qualunque altra base è formata da *k* vettori, il numero di vettori di una base è detto **dimensione di *V*** e si indica con **dim(*V*).**

- se dim(V) = k e V contiene $h<k$ vettori linearmente indipendenti, allora è sempre possibile aggiungere a questi $k-h$ vettori in modo da ottenere una base di V.
- se $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)}$ è una base di V, allora ogni vettore $w \in V$ può essere espresso **in un solo modo** come combinazione lineare dei vettori della base (**teorema di rappresentazione**); infatti se $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)}$ è una base di V allora è un insieme di generatori, che la combinazione lineare sia unica si dimostra ***per assurdo*** supponendo che $w \in V$ si possa esprimere con due diverse combinazioni lineari:
  $w = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_k v^{(k)}$ e $w = \beta_1 v^{(1)} + \beta_2 v^{(2)} + \cdots + \beta_k v^{(k)}$ con $\alpha_i \neq \beta_i$ per almeno un i.
  Da ciò si ottiene che $0 = w - w = (\alpha_1 - \beta_1)v^{(1)} + \cdots + (\alpha_i - \beta_i)v^{(i)} + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v^{(k)}$ cioè esiste una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli ($\alpha_i - \beta_i \neq 0$) contro l'ipotesi che $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)}$ siano linearmente indipendenti.

Esempio 28.6

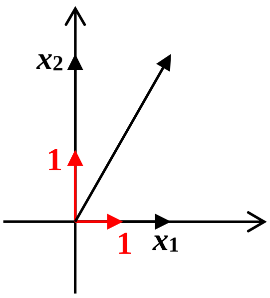
La dimensione dello spazio generato dall'insieme dei vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ è 2; infatti i due vettori sono linearmente indipendenti:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

La dimensione dello spazio generato dall'insieme dei vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ è 1; infatti i due vettori sono linearmente dipendenti: $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Esempio 28.7

R^2 è generato dall'insieme dei vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ che costituisce una base di R^2; infatti i due vettori sono linearmente indipendenti e si può scrivere $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, i coefficienti coincidono con le componenti del vettore e l'insieme di generatori è composto dai vettori fondamentali $e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ detti anche **versori** degli assi o **base canonica di *R*²** quindi **dim(**R^2)=2.



In generale: gli n vettori fondamentali $e^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, e^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \cdots, e^{(n)}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ sono una base di R^n detta **base canonica**; infatti sono linearmente indipendenti e un generico vettore $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ di R^n si può scrivere come combinazione lineare degli $e^{(i)}$:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\x_2\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1e^{(1)}+x_2e^{(2)}+\cdots+x_ne^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}x_ie^{(i)}.$$

quindi **dim(** R^n **)**=n.

Domanda chiave

Come si può determinare se i vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(k)} \in R^n$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di un sottospazio vettoriale?

Risposta

Si utilizzano, come vedremo in seguito, il **rango** della matrice $n\times k$ ottenuta accostando i k vettori:

$$A=\left[v^{(1)} \quad v^{(2)} \quad \cdots \quad v^{(k)}\right]$$

28.6 Rango di una matrice

Il **rango colonna (riga**) di una matrice $A_{n\times m}$ è la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne (righe) di A ossia il numero massimo di colonne (righe) linearmente indipendenti.

Il rango riga e il rango colonna coincidono, quindi si parla semplicemente di **rango di *A*** indicato con $rg(A)$ o $r(A)$.
Le operazioni sulle righe (colonne) di A che non ne modificano il rango, **operazioni elementari**, sono:

- scambio di righe (colonne) anche non consecutive;
- moltiplicazione per uno scalare k;
- sostituzione della p-ma riga (colonna) con la somma della stessa con un'altra q-ma riga (colonna) moltiplicata per uno scalare k ossia con la combinazione lineare delle righe (colonne) p e q tramite lo scalare k.

Osservazione: utilizzando le operazioni elementari si può ridurre una matrice in **forma triangolare superiore o inferiore** dove gli elementi al di sotto o al di sopra della diagonale principale hanno valori nulli, questo favorisce la determinazione delle colonne (righe) linearmente indipendenti.

Esempio 28.8

La matrice

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\-1 & 0 & 1 & 0\\2 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ ha lo stesso rango di

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ ottenuta sostituendo la seconda riga con la somma della stessa con la prima;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$ ottenuta sostituendo la terza riga con la differenza della stessa e la prima moltiplicata per 2;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$ ottenuta sostituendo la terza riga con la differenza della stessa moltiplicata per 2 e la seconda moltiplicata per 3.

La matrice finale è triangolare superiore e il suo rango è 3; infatti dove ci sono gli 0 non è possibile ottenere nella combinazione lineare un valore non nullo.

Esempio 28.9

Le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 17 & 20 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

hanno lo stesso rango perché

- A e B contengono le stesse righe in ordine diverso;
- C è ottenuta sostituendo la terza riga di B con la stessa moltiplicata per 2;
- D è ottenuta sostituendo la prima riga di A con la somma della stessa più la seconda moltiplicata per 2.

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$ ha lo stesso rango di

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$ ottenuta sostituendo la seconda riga con la differenza della la prima moltiplicata per 5 e la seconda;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \end{bmatrix}$$ ottenuta sostituendo la terza riga con la differenza la prima moltiplicata per 9 e la terza;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ottenuta sostituendo la terza riga con la differenza della seconda moltiplicata per 2 e la terza.

La matrice finale è triangolare superiore e il suo rango è 2; infatti l’ultima riga è nulla.

Domanda chiave

Come si può determinare facilmente il **rango** di una matrice $A_{n\times m}$?

Risposta

Si utilizza il calcolo dei minori di A.

28.7 Calcolo del rango di una matrice

Si dimostra che il **rango di una matrice $A_{n\times m}$** è il **massimo ordine dei minori non nulli**.

Teorema di Kroneker

Il rango di una matrice $A_{n\times m}$ è h se e solo se sia possibile estrarre da essa una sottomatrice di ordine h non singolare (minore non nullo) e qualunque altra sottomatrice di ordine $h+1$ ottenuta orlando la precedente con una qualunque riga e colonna sia singolare.

Valgono le seguenti proprietà:

- se A è una matrice quadrata di ordine n e $\det A = 0$ allora il rango di $A < n$; per questo motivo nel caso di una matrice quadrata si inizia a determinarne il rango calcolandone il determinante. Qualora $\det A \neq 0$ allora $rg(A)=n$ e la matrice si dice a **rango pieno.**
- se $rg(A) = h$ allora da A si potranno estrarre h vettori colonna (o riga) linearmente indipendenti che sono una base del così detto **spazio colonna (o riga)** la cui dimensione è quindi h.
  Gli h vettori della base corrispondono al minore non nullo individuato per determinare il rango.

Esempi 28.10

- Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ poiché $\det A = 5 \neq 0$ si ha che $rg(A) = 3$.
- Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ poiché $\det A = 0$ (la terza riga è la somma delle prime due) si ha che $rg(A) < 3$. Il minore $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ quindi $rg(A) = 2$.

Esempi 28.8 (continua)

Si è visto che il rango della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ è 2, usando il teorema di Kroneker:

$a_{11} = 1 \neq 0, \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$ e $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} = 0$, $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{bmatrix} = 0$. Quindi $rg(A) = 2$ e anche $rg(B) = rg(C) = rg(D) = 2$.

Poiché $rg(A) = 2$ una base dello spazio colonna (riga) di A è formata da due vettori.

- Una base dello spazio colonna di A è $\left\{ \begin{bmatrix}1\\5\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\10\end{bmatrix} \right\}$; infatti corrisponde al minore non nullo individuato per determinare il rango. Analogamente basi degli spazi colonna di B, C, D sono rispettivamente $\left\{ \begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\10\\6\end{bmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{bmatrix}1\\9\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\10\\12\end{bmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{bmatrix}11\\5\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}14\\6\\10\end{bmatrix} \right\}$.

- L'insieme dei vettori $\{[5 \quad 6 \quad 7 \quad 8], [9 \quad 10 \quad 11 \quad 12]\}$, è una base dello spazio riga di A ma anche di B, di C e di D; infatti B, C e D sono ottenute da A con operazioni elementari sulle righe.

In questo caso la domanda "Gli spazi riga di B, C e D, ottenute da A con operazioni elementari sulle righe, coincidono con lo spazio riga di A" ha risposta affermativa; infatti sono generati dalla stessa base.

28.1 Applicazione

Il punto x può essere visto come elemento dello spazio vettoriale R^2 e la deformazione descritta dal prodotto Ax è il sottospazio di R^2 generato dalle colonne di A. Poiché $\det A = \begin{vmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$, il $rg(A)$=2 quindi lo spazio V generato dalle colonne (righe) di A ha dimensione 2.

Essendo V sottospazio di R^2 con dimensione 2, si ha che V= R^2 cioè si ha una deformazione del piano che copre tutto il piano.

Si è già osservato che, poiché A è non singolare cioè invertibile, moltiplicando a sinistra per A^{-1} la relazione $x' = Ax$ si ottiene la relazione $x = A^{-1}x'$ che permette di riportare ogni punto del quadro allo stato originario.

Invece, scegliendo la matrice così $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix}$, la relazione $x' = Ax$ produce i vettori

$x' = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}x_1\\-2x_1\end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ ossia i punti di una retta per l'origine; infatti

$rg(A) = rg\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix}\right) = 1$ e V, lo spazio colonna (riga) di A, ha dimensione 1 quindi $V \subset R^2$.

Si osserva che in questo caso, poiché det$A$ = 0, A non è invertibile quindi usando questa trasformazione non sarebbe possibile riportare ogni punto del quadro allo stato originario.

Per esempio, la corrispondenza fra i punti delle rette a e b e i punti A' e B' non è biunivoca; infatti, essendo l'immagine indipendente da x_2, ad ogni retta verticale (x_1 costante) corrisponde un punto.