Lezione 29 - Sistemi lineari

Un problema 29.1 - Costi materie prime e budget

Una azienda ha *m* prodotti, per la produzione di ognuna tipologia di essi sono necessarie alcune materie prime, complessivamente il numero di materie prime è *n*.
Le quantità di materie prime necessarie per la produzione mensile di ciascuno dei prodotti sono rappresentate nella matrice *A*, $m\times n$ (se nel prodotto *i* –mo la *j* –ma materia non è utilizzata, nella matrice $a_{ij}= 0$) e i relativi prezzi unitari di acquisto delle materie prime sono nel vettore *p*, $n\times 1$.
In questa rappresentazione i costi totali delle materie prime relativi alla produzione mensile dei diversi prodotti sono dati dal vettore $b=A\,p$, $n\times 1$.
Il direttore della produzione vuole capire **se**, fissando un budget mensile per ogni prodotto e mantenendo fisse le quantità delle materie prime, **esiste** un prezzo per ogni materia prima che soddisfi tale uguaglianza. Si trova a risolvere un problema difficile perché i prodotti sono 100 e le materie prime sono 50 quindi deve risolvere un sistema di 100 equazioni e 50 incognite! Come fare?

Definizione 29.1

Una uguaglianza del tipo $Ax = b$ dove *A* è una matrice di dimensione $m\times n$, *x* è un vettore di dimensione *n*, *b* è un vettore di dimensione *m* si dice **sistema lineare**.
Per esteso il sistema si scrive:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Un vettore $x \in R^n$ è soluzione del sistema $Ax = b$ se verifica l'uguaglianza.

Osservazione importante:

Poiché il prodotto Ax può essere scritto così:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ si può vedere come la ricerca del vettore $\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ di coefficienti che generano *b* come combinazione lineare delle colonne di *A*.

Esempio 29.1

$x \in R^2, b \in R^3 \Rightarrow A_{3\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è $\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 5x_2 \\ 0x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ cioè $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$

Il sistema è determinato; infatti è equivalente a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 11x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{10}{11} = \dfrac{1}{11} \\ x_2 = \dfrac{5}{11} \end{cases}$.

Esempio 29.2

$x \in R^4, b = \underline{0} \in R^3 \Rightarrow A_{3\times 4}$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Il sistema è $\begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_2+x_4\\x_1-x_2+x_3-x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ cioè $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_4=0\\x_1+x_3=x_2+x_4\end{cases}\Leftrightarrow$.

$$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_3\\-x_4\end{bmatrix}$$

Il sistema è determinato; infatti le soluzioni sono infinite e hanno la forma $[x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4]^T=[k\quad h\quad -k\quad -h]^T$ con $k,h\in R$.

Osservazione: il sistema si potrebbe anche scrivere come

$$Ax=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_2+x_4\\x_1+x_3-x_2-x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\x_2\\-x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_3\\0\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\x_4\\-x_4\end{bmatrix}=$$

$$=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

le colonne di A sono linearmente dipendenti; infatti esistono infiniti vettori x non nulli che generano combinazioni lineari nulle delle colonne di A.

Per esempio, scegliendo k=2, h=3 si ha $Ax=2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

Teorema 29.1 (Teorema di Rouché Capelli)

Dato il sistema lineare $Ax=b$ dove $A_{m\times n}$, $x\in R^n$, $b\in R^m$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\\vdots\\a_{m1}x_1+\ldots+a_{m1n}x_n=b_m\end{cases}$$

1. $Ax=b$ ha soluzione $\Leftrightarrow$ $rg(A)=rg(A|b)$ dove $[A|b]$ è la **matrice completa** ottenuta orlando la **matrice dei coefficienti** A con la colonna b dei **termini noti**.
   In questo caso il sistema si dice **compatibile**, altrimenti il sistema si dice **incompatibile** o **impossibile**.

2. Se $rg(A)=rg(A|b)=n$ dove n è la dimensione del vettore x allora la soluzione di $Ax=b$ è unica; in questo caso il sistema si dice **determinato.**

3. Se $rg(A)=rg(A|b)<n$ il sistema ha infinite soluzioni e si dice **indeterminato**.

Esempio 29.3

Data la matrice $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ determinare per diversi vettori b se i sistema $Ax=b$ ha soluzione.

Si calcola il rango di A: $\det A = 0, \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$ quindi il sistema $Ax = b$ non può essere determinato; infatti il rango di A è inferiore al numero delle incognite che è 3.

- Caso $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow rg(A\,|\,b) = 3 \neq rg(A)$

  quindi il sistema $Ax=b$ è impossibile; infatti $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 2a_2 - a_1 \end{bmatrix}$ ossia la terza colonna di A è combinazione lineare delle altre due mentre il vettore b non lo è.

- Caso $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

  $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = 0, \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(A\,|\,b) = 2 = rg(A)$

  quindi il sistema $Ax=b$ ha infinite soluzioni; infatti $rg(A) = rg(A|b) < n$.

Dimostrazione 29.1

1. $Ax = b$ ha soluzione $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(A|b)$

   $\boxed{\Rightarrow}$

   Se si suppone che il sistema $Ax = b$ abbia soluzione, il vettore b può essere ottenuto come combinazione lineare delle colonne di A i cui coefficienti sono le incognite del sistema, quindi $rg(A) = rg(A|b)$.

   $\boxed{\Leftarrow}$

   Si suppone che $rg(A) = rg(A|b)$ cioè il vettore colonna b è linearmente dipendente dalle colonne di A quindi esisterà un vettore x di coefficienti per cui $Ax = b$, tale vettore e soluzione del sistema.

2. Se $rg(A) = rg(A|b) = n$ allora la soluzione di $Ax = b$ è unica.
   Sia K è lo spazio colonna di A allora $\dim(K) = rg(A) = n$ pari al numero di colonne di $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ che sono quindi una sua base di tale spazio.
   Si è visto che se $\{a_1, \quad \cdots \quad, a_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale K, ogni elemento di K è combinazione lineare unica di tale base, ossia $b \in K \Rightarrow \exists x \in R^n : x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b$.
   Il vettore $x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ dei coefficienti è l'unica soluzione del sistema $Ax = b$.

3. Se $rg(A) = rg(A|b) = k < n$ allora $Ax = b$ è equivalente ad un sistema composto da k equazioni con $k \leq \min(n\text{-}1,m)$.
   Scelte k incognite $\{x_1, \quad \cdots \quad, x_k\}$ (si supponga che siano le prime k) in modo che la matrice dei coefficienti $A_{k \times k}$ sia non singolare, si ha un sistema la cui soluzione è data dal vettore $\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix}^T$ dipende dalle altre n-k variabili ciascuna delle quali può essere scelta liberamente.
   Si è quindi dimostrato che le soluzioni del sistema sono infinite; più precisamente si dice che sono ∞^{n-k}.

Applicazione 29.1

E' evidente che si tratta di un sistema lineare dove A e b sono dati e l'incognita è il vettore p dei prezzi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} p_1 + \ldots + a_{1n} p_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} p_1 + \ldots + a_{mn} p_n = b_m \end{cases}$$

Per il teorema di Rouché Capelli il **vettore dei prezzi esiste** se e solo se r(A)= r($A|b$) cioè se il vettore b dei budget dipende linearmente dalle colonne di A . Il vettore dei prezzi è unico se e solo se r(A)=n.

Nel caso posto dal direttore si può dire che, poiché m=100 e n=50, A è una matrice 100×50 e $A|b$ è una matrice 100×51 quindi r(A)≤50 e r($A|b$)≤51 e i due ranghi potrebbero essere diversi, anzi, se il vettore b non è scelto opportunamente, è molto probabile che lo siano!

In conclusione si può dire che la richiesta del direttore può essere soddisfatta se e solo se r(A)=r($A|b$)≤50, questo avviene, per esempio, se il vettore b dei budget fosse proporzionale alle quantità di una materia prima relative ai 100 prodotti. Inoltre il vettore p è unico se e solo se vale r(A)=r($A|b$)=50 cioè le i vettori colonna delle quantità relative alle diverse materie prime sono linearmente indipendenti .

Problema 29.2 Modello input-output: i prezzi di equilibrio (continua)

Si è visto come il vettore degli esborsi a partire dalla matrice input-output A e dal vettore colonna $p = [p_i]$ dove p_i è il prezzo del prodotto dell'i-esimo settore è $A^T p$,vettore colonna.

Affinché il vettore p scelto garantisca l'equilibrio tra i diversi settori, il vettore degli esborsi deve risultare uguale al vettore dei ricavi cioè:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \\ p_3 q_3 \end{bmatrix} \text{ dove } \begin{cases} q_1 = q_{11} + q_{12} + q_{13} \\ q_2 = q_{21} + q_{22} + q_{23} \\ q_3 = q_{31} + q_{32} + q_{33} \end{cases}$$

Per esempio, se la matrice input-output è $A = \begin{bmatrix} 7.5 & 6 & 16.5 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{bmatrix}$ si ha $A^T = \begin{bmatrix} 7.5 & 14 & 80 \\ 6 & 6 & 180 \\ 16.5 & 30 & 40 \end{bmatrix}$ quindi

si deve determinare $p = [p_i]$ tale che $\begin{bmatrix} 7.5 & 14 & 80 \\ 6 & 6 & 180 \\ 16.5 & 30 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 p_1 \\ 50 p_2 \\ 300 p_3 \end{bmatrix}$.

Si è visto che l'uguaglianza può essere scritta come $A^T p = Dp$ dove $D = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$

Ci si chiede "Che condizioni bisogna porre su A e D in modo che sia garantita l'esistenza di tale vettore dei prezzi? Quanti sono i vettori che soddisfano la relazione $A^T p = Dp$?"

Definizione 29.2 Sistemi omogenei

Un sistema è detto omogeneo se è del tipo $Ax = \underline{0}$ ossia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} .$$

Poiché $rg(A)$=$rg(A|0)$, per il teorema di Rouché Capelli questo tipo di sistemi è **sempre compatibile** e ha sempre la soluzione $x = \underline{0}$ (**soluzione banale**) ma può avere anche soluzioni non nulle qualora il rango di A non sia pieno ossia ***rg*(*A*) < *n***, in tal caso il sistema ha infinite soluzioni.

Esempio 29.4

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\det A=1\neq 0\Rightarrow rg(A)=3$, A è anche minore non nullo di $(A|b)$ quindi $rg(A) = rg(A|b) = 3$ pari alla dimensione del vettore x, quindi il sistema ha una e una sola soluzione che è ottenuta scegliendo tutte le componenti nulle (**soluzione banale**).

Esempio 29.5

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\1&1&0\\2&1&3\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3\\1&1&0\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\det A=0\Rightarrow rg(A)<3$, aggiungendo la colonna b il rango non cambia quindi $rg(A) = rg(A|b) < 3$ e il sistema ha infinite soluzioni di cui una è la soluzione nulla (soluzione banale).

Il sistema è $\begin{bmatrix}x_1+3x_3\\x_1+x_2\\2x_1+x_2+3x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ cioè $\begin{cases}x_1+3x_3=0\\x_1+x_2=0\\2x_1+x_2+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+3x_3=0\\x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=-\dfrac{x_1}{3}\\x_2=-x_1\end{cases}$.

Se, per evitare frazioni, indichiamo $x_1=3k$, le soluzioni hanno la forma $[3k \quad -3k \quad -k]^T, k\in R$.

Applicazione 29.2

Il sistema $A^T p = Dp$ può essere scritto in modo diverso:

$$A^T p - Dp = \underline{0}$$
$$\left(A^T - D\right)p = \underline{0}$$

Si tratta di un **sistema omogeneo** quindi ha sempre la soluzione banale $p=\underline{0}$, tale soluzione non ha nessun interesse pratico, vediamo se il teorema di Rouchè Capelli ci dice se il sistema ha altre soluzioni oltre a quella banale.

$\det\left(A^T-D\right)=\det\begin{bmatrix}-22.5&14&80\\6&-44&180\\16.5&30&-260\end{bmatrix}=0$ quindi $rg(A^T\text{-}D) < 3$ ossia il sistema ha infinite soluzioni.

Più precisamente $rg(A^T\text{-}D) = 2$; infatti è possibile estrarre un minore di ordine 2 non nullo:

$$\det\begin{bmatrix}6&-44\\16.5&30\end{bmatrix}=2\det\begin{bmatrix}3&-22\\16.5&30\end{bmatrix}=906$$

Quindi la seconda e terza riga sono linearmente indipendenti è il sistema

$$\left(A^T-D\right)p=\begin{bmatrix}-22.5&14&80\\6&-44&180\\16.5&30&-260\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}-22.5p_1+14p_2+80p_3=0\\6p_1-44p_2+180p_3=0\\16.5p_1+30p_2-260p_3=0\end{cases}$$

è equivalenta a:

$$\begin{cases}6p_1-44p_2=-180p_3\\16.5p_1+30p_2=260p_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3p_1-22p_2=-90p_3\\16.5p_1+30p_2=260p_3\end{cases}$$

L'insieme dei vettori dei prezzi che soddisfa il sistema è quindi $\begin{cases}p_1=\dfrac{20}{3}p_3\\p_2=5p_3\end{cases}\Rightarrow p=k\begin{bmatrix}20\\15\\3\end{bmatrix}, k\in R$

In generale

$$\left(A^T - D\right) = \left(\begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11}+q_{12}+q_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{21}+q_{22}+q_{23} & 0 \\ 0 & 0 & q_{31}+q_{32}+q_{33} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11}-(q_{11}+q_{12}+q_{13}) & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22}-(q_{21}+q_{22}+q_{23}) & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33}-(q_{31}+q_{32}+q_{33}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -(q_{12}+q_{13}) & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & -(q_{21}+q_{23}) & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & -(q_{31}+q_{32}) \end{bmatrix}$$

Si osserva che aggiungendo alla prima riga la somma delle altre si ottiene una riga nulla quindi det(A^T-D) = 0 comunque si scelga la matrice A.