Lezione 30 – Risoluzione di Sistemi lineari

Domanda chiave

Come si può risolvere un sistema linerare $Ax = b$ nel modo più semplice e sicuro?

Risposta

Ci sono alcuni metodi: metodo di sostituzione, metodo di Cramer, metodo di Gauss (da preferire).

30.1 Il metodo di Gauss

Il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{m1n}x_n = b_m \end{cases}$$

può essere rappresentato attraverso la **matrice completa** ottenuta accostando la colonna *b* alla matrice *A*

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Si ricorda che le operazioni sulle righe (colonne) che non modificano il rango di una matrice, **operazioni elementari**, sono:

- scambio di righe (colonne) anche non consecutive;
- moltiplicazione per uno scalare *k;*
- sostituzione della *p*-ma riga (colonna) con la somma della stessa con un'altra *q*-ma riga (colonna) moltiplicata per uno scalare *k* ossia con la combinazione lineare delle righe (colonne) *p* e *q* tramite lo scalare *k.*

Il metodo consiste nell'utilizzare operazioni elementari sulle righe e sulle colonne della matrice completa in modo da rendere nulli gli elementi al di sotto (o al di sopra) della "diagonale principale": **forma canonica.**

Se la matrice non è quadrata non si potrebbe parlare di diagonale principale, quindi si dice che la forma canonica si ha quando

$$a_{ij} = 0 \text{ se } i > j \text{ con } i, j = 1,\ldots,\min(n,m) \text{ oppure } \quad a_{ij} = 0 \text{ se } i < j \text{ con } i, j = 1,\ldots,\min(n,m)$$

In questo modo si ottiene un numero decrescente di incognite nel passare ad equazioni successive.

Una volta ultimata l'operazione si parte dall'ultima equazione dove si ricava un'incognita che si sostituisce nella precedente e così via fino alla prima.

In particolare, dopo avere verificato che in ogni equazione l'ordine delle incognite è lo stesso, si procede così:

1) scrivere la matrice completa $[A \mid b] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$;
2) riordinare le righe in modo tale che l'elemento di posizione 1,1 sia diverso da 0, nel riordinare le colonne non va considerata la colonna *b*;
3) rendere nulli gli elementi della prima colonna nelle righe successive sommando a ciascuna riga la prima moltiplicata per un fattore opportuno;
4) ripetere le operazioni dei punti 2 e 3 per le righe successive fino all'ultima riga, considerando le sottomatrici ottenute escludendo le colonne e le righe già utilizzate;
5) determinare $rg(A)$ e $rg(A|b)$ e, applicando il teorema di Rouché Capelli, stabilire se il sistema è compatibile;
6) se il sistema è compatibile scrivere il sistema equivalente a quello iniziale ricordando che se si sono scambiate due colonne anche le incognite vanno scambiate;
7) calcolare la soluzione partendo dall'ultima riga da cui si ricava una componente di *x* che si sostituisce nella penultima da cui si ricava un'altra componente di *x* e così via fino alla prima equazione.

Esempio 30.1

Dato il sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$

1) la matrice completa è $[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

2), 3) e 4) la matrice [A|b] ha lo stesso rango di

- $\begin{array}{r} 1 \\ \\ -1 \end{array}\begin{bmatrix} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ottenuta sostituendo la seconda riga con la somma della stessa con la prima;
- $\begin{array}{r} \\ -1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{[2]} & 4 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ottenuta sostituendo la terza riga con la differenza della stessa e la prima;
- $\begin{bmatrix} [1] & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & [2] & 4 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & [2] & 6 \end{bmatrix}$ ottenuta sottraendo alla terza riga moltiplicata per 2 e la seconda.

5) dalla matrice finale si deduce che $rg(A)=rg(A|b)=3$ quindi il sistema è determinato;

6) il sistema equivalente è $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 2x_3 = 6 \end{cases}$

7) la soluzione si trova partendo dalla terza riga da cui si ricava x_3 che si sostituisce nella seconda da cui si ricava x_2 che si sostituisce nella prima da cui si ricava x_1:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

Esempio 30.2

Dato il sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$

1) la matrice completa è $[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2), 3) e 4) la matrice [A|b] ha lo stesso rango di

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ottenuta sostituendo la seconda riga con la somma della stessa con la prima;
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 2 & 4 & 4 \\ \boxed{0} & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ ottenuta sostituendo la terza riga con la differenza della stessa e la prima moltiplicata per 2;
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 2 & 4 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & -6 \end{bmatrix}$ ottenuta sostituendo la terza riga con la differenza della stessa moltiplicata per 2 e la seconda moltiplicata per 3.

5) Dalla matrice finale si deduce che $rg(A)$=2 e $rg(A|b)$=3 quindi il sistema è impossibile; infatti

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 0 = -6 \end{cases} .$$

Esempio 30.3

Dato il sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

1) la matrice completa è $[A\,|\,b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

2), 3) e 4) la matrice [A|b] ha lo stesso rango di

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 2 & 4 & 4 \\ \boxed{0} & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ ottenuta sostituendo la seconda riga con la somma della stessa con la prima;

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 2 & 4 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ottenuta sottraendo alla terza riga la seconda;

5) dalla matrice finale si deduce che $rg(A)$=$rg(A|b)$=2<3 quindi il sistema è indeterminato;

6) il sistema equivalente è $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 = -2x_3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 + 2 \end{cases}.$

Le soluzioni hanno la forma $[k \quad -2k+2 \quad k]^T = k[1 \quad -2 \quad 1]^T + [0 \quad 2 \quad 0]^T, k \in R$.

Esempio 30.4

Dato il sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 - x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

1) la matrice completa è $[A\,|\,b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -1 & 20 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

2), 3) e 4) eseguendo operazioni elementari sulle righe e colonne di [A|b] si ha

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 20 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

5) $rg(A)$ = $rg(A|b)$=3 (la quarta riga di [A|b] è linearmente dipendente dalla terza) quindi il sistema ha una sola soluzione.

6) ricordando che si sono scambiate la prima e la seconda colonna, il sistema equivalente è

$$\begin{cases} x_2 + 2x_1 = 12 \\ x_1 + 3x_3 = 10 \\ -4x_3 = 10 \end{cases}$$

$$7)\ \begin{cases} x_2 + 2x_1 = 12 \\ x_1 + 3x_3 = 10 \\ x_3 = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_1 = 12 \\ x_1 = \dfrac{35}{2} \\ x_3 = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -23 \\ x_1 = \dfrac{35}{2} \\ x_3 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

30.2 Il metodo di Cramer

Il sistema lineare $Ax=b$ dove A matrice quadrata di ordine n non singolare $x \in R^n$, $b \in R^n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

1) ha **una e una sola soluzione**; infatti $rg(A) = rg(A|b) = n$
2) le componenti della soluzione x sono

$$x_i = \frac{|A^{(i)}|}{|A|} \text{ dove } A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, i = 1, \ldots, n$$

$$\uparrow$$
$$i$$

infatti se A è invertibile

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

e, poiché

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

si ha

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}A^*b$$

da cui la tesi.

Esempio 30.1 (continua)

Dato il sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$ risolverlo con il metodo di Cramer.

Si è già visto che il sistema è determinato, quindi la matrice dei coefficienti è non singolare.

1) Si calcola $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

2) Si calcolano i tre determinanti ottenuti sostituendo ognuna delle colonne con in vettore $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6,\ \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8,\ \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6.$$

3) Si calcolano le tre componenti della soluzione: $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = 3$, $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = -4$, $x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = 3$.