Lezione 31 bis –Funzioni a più variabili lineari e quadratiche

In questa lezione si applicano i concetti dell'algebra lineare per descrivere alcune particolari funzioni di una o più variabili.

Prima di tutto diamo la definizione di omogeneità di una funzione.

Definizione 31.1
Sia $f : X \subseteq R^n \to R$ una **funzione omogenea** di

- grado 1 : $f(\alpha \underline{x}) = \alpha f(\underline{x}),\ \alpha \in R,\ \underline{x} \in R^n$
- grado 2 : $f(\alpha \underline{x}) = \alpha^2 f(\underline{x}),\ \alpha \in R,\ \underline{x} \in R^n$

Esempio 31.1
$f(\underline{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$ è omogenea; infatti $f(\alpha \underline{x}) = 2\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 = \alpha^2 (2x_1^2 + x_2) = \alpha^2 f(\underline{x})$
$f(\underline{x}) = 2x_1^2 + x_2$ non è omogenea; infatti $f(\alpha \underline{x}) = 2\alpha^2 x_1^2 + \alpha x_2 = \alpha (2\alpha x_1^2 + x_2)$

Funzioni omogenee di 1° e 2° grado

Caso particolare $f : R \to R$
$f(x) = ax$ omogenea lineare di primo grado
$f(x) = ax^2$ omogenea quadratica di secondo grado

Caso particolare $f : R^2 \to R$
$f(\underline{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = \underline{x}^T \underline{a} = \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle$ omogenea lineare di primo grado

$$f(x) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = \underline{x}^T \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{bmatrix} \underline{x}$$

omogenea quadratica di secondo grado

Forme quadratiche

Problema 31.1
Se $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\underline{x}^T \underline{x}}$ è la norma euclidea di un vettore $\underline{x} \in R^n$, che caratteristiche ha $\|A\underline{x}\|_2^2$?

Definizione 31.2
Sia $f : R^n \to R$ dicesi **forma quadratica** una funzione quadratica ovvero
$\underline{x} \mapsto \underline{x}^T A \underline{x}$ dove A è matrice quadrata di ordine n

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = [x_1 \; x_2 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \; x_2 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left(a_{11}{x_1}^2 + \dots + a_{1n}x_1x_n\right) + \dots + \left(a_{n1}x_1x_n + \dots + a_{nn}{x_n}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Esempio 31.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2x_3 + 2x_3x_1$$

Osservazione

La matrice che genera una forma quadratica non è unica; infatti lo stesso polinomio si ottiene considerando la forma quadratica $f(\underline{x}) = \underline{x}^T B \underline{x}$ dove B è simmetrica

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Importante: le matrici che generano una stessa forma quadratica sono infinite, tra queste ce n'è una simmetrica ottenuta considerando sulla diagonale principale i coefficienti di x_1^2, x_2^2, x_3^2 e nelle altre posizioni i coefficienti con indici corrispondenti divisi per 2 ovvero

$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} b_{ij}x_ix_j = \underline{x}^T A \underline{x}$ dove gli elementi di A sono $a_{ii} = b_{ii}$, $i = 1,\dots,n$ e

$a_{ij} = a_{ji} = \dfrac{b_{ij}}{2}$, $i = 1,\dots,n,\; j = 1,\dots,n$.

Poiché, come vedremo in seguito, le matrici simmetriche hanno particolari proprietà, in seguito senza perdere di generalità si considererà come **matrice associata a una f.q.** quella **simmetrica**.

Applicazione 31.3

$\|A\underline{x}\|_2^2 = (A\underline{x})^T(A\underline{x}) = \underline{x}^T A^T A \underline{x} = \underline{x}^T B \underline{x}$ è una forma quadratica. Si osserva che, poiché $B = A^T A$, B è simmetrica e poiché $\|A\underline{x}\|_2^2 \geq 0$ la forma quadratica è non negativa per ogni $\underline{x} \in R^n$.

Domanda chiave: ***perché sono così interessanti le forme quadratiche?***

Il **segno** di una forma quadratica è importante al fine della determinazione dei massimi e dei minimi. Si pensi alla forma $f(x)=ax^2$, è concava se $a<0$ e convessa se $a>0$ e il grafico passa per l'origine perciò se $f(x)\le 0$ per ogni x il punto (0,0) è di massimo assoluto, se $f(x)\ge 0$ per ogni x il punto (0,0) è di minimo assoluto.

Definizione 31.3

In generale una **forma quadratica** $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x}$ dove A è matrice quadrata di ordine n si dice

- **definita positiva** se $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x}>0\ \forall \underline{x}\in R^n,\ \underline{x}\ne \underline{0}$
- **definita negativa** se $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x}<0\ \forall \underline{x}\in R^n,\ \underline{x}\ne \underline{0}$
- **semidefinita positiva** se $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x}\ge 0\ \forall \underline{x}\in R^n$
- **semidefinita negativa** se $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x}\le 0\ \forall \underline{x}\in R^n$
- **indefinita** se esistono $\underline{x}^{(1)},\underline{x}^{(2)}\in R^n$ tali che $q\left(\underline{x}^{(1)}\right),q\left(\underline{x}^{(2)}\right)$ hanno segno opposto

Esempi 31.3

- Sia $q(\underline{x})=x_1^2+x_2^2,\ \underline{x}\in R^2$ è generata dalla matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Si osserva che $q(\underline{x})>0\ \forall \underline{x}\in R^2,\ \underline{x}\ne \underline{0}$ quindi $q(\underline{x})$ è **definita positiva**

- Sia $q(\underline{x})=-x_1^2-x_2^2,\ \underline{x}\in R^2$ è generata dalla matrice $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$q(\underline{x})<0\ \forall \underline{x}\in R^2,\ \underline{x}\ne \underline{0}$ quindi $q(\underline{x})$ è **definita negativa**

- Sia $q(\underline{x})=(x_1-x_2)^2+x_3^2,\ \underline{x}\in R^3$ è generata dalla matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Se $x_1=x_2$ e $x_3=0$ la forma quadratica è nulla, per tutti gli altri valori di $\underline{x}$ è positiva quindi $q(\underline{x})\ge 0\ \forall \underline{x}\in R^3$ e $q(\underline{x})$ è **semidefinita positiva.**

Domanda chiave: ***Come determinare il segno di una f.q. (definita positiva, ecc.)?***

Sia A una matrice quadrata

- un **minore principale** è il determinante di una sottomatice quadrata di A la cui diagonale principale è composta solo da elementi della diagonale di A ossia una sottomatrice formata da k righe e dalle corrispondenti k colonne;
- un **minore principale** si dice **di Nord-Ovest** se l'elemento di posizione 1,1 è lo stesso di A e le righe e le colonne sono adiacenti ossia un minore ottenuto considerando le prime k righe e le prime k colonne di A.

Per esempio, sia $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$m_1 = 4, m_2 = 0, m_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, m_4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, m_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, m_6 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

sono tutti minori principali della matrice A ma solo $m_1 = 4, m_3 = 0, m_6 = -6$ sono minori principali di Nord-Ovest.

Teorema 31.1
A matrice reale e simmetrica di ordine n è definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di Nord-Ovest sono positivi.

Teorema 31.2
A matrice reale e simmetrica di ordine n è definita negativa $\Leftrightarrow$ ogni suo minore principale di Nord-Ovest di ordine pari è positivo e di ordine dispari è negativo.

Teorema 31.3
A matrice reale e simmetrica di ordine n è semidefinita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali sono positivi o nulli.

Teorema 31.4
A matrice reale e simmetrica di ordine n è semidefinita negativa $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di ordine dispari sono negativi o nulli e tutti i minori principali di ordine pari sono positivi o nulli.

Esempi 31.4
Stabilire il segno delle forme quadratiche

1. $q(\underline{x}) = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 5x_3^2,\ \underline{x} \in R^3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 3 > 0$, $\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{11}{4} > 0$, $|A| = 13 > 0$ quindi A è definita positiva.

2. $q(\underline{x}) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2,\ \underline{x} \in R^2$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 4 > 0, |A| = 24 > 0$ quindi A è definita positiva.

3. $q(\underline{x}) = x_1^2 + 2\alpha x_1x_2 + x_2^2,\ \underline{x} \in R^2, \alpha \in R$

$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix},\ a_{11} = 1 > 0$

- ✓ A non è mai definita negativa perché $a_{11} = 1 > 0$
- ✓ $|A| > 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1 \Rightarrow A$ è definita positiva
- ✓ $|A| < 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2 < 0 \Leftrightarrow \alpha < -1 \vee \alpha > 1 \Rightarrow A$ è indefinita
- ✓ $|A| = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 1$
- ✓ $\alpha = -1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ è semidefinita positiva: $q(\underline{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$
- ✓ $\alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ è semidefinita positiva: $q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$