Lezione 32 – Derivabilità e differenziabilità

Problema 32.1

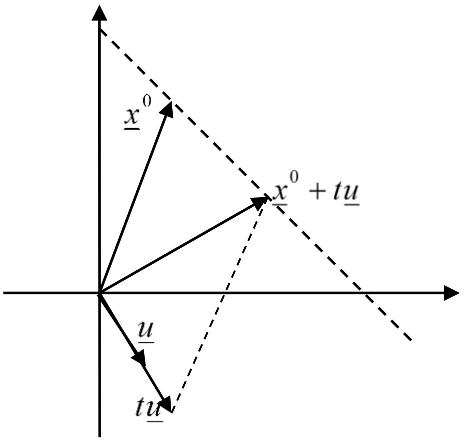
Sia $Q(K,L)=4K^{3/4}L^{1/4}$ la funzione di Cobb-Douglas che rappresenta la quantità prodotta dove K è il capitale e L è la forza lavoro. Ci si chiede quali sono le produttività marginali del capitale K e del lavoro L?

Definizione 32.1

$f: A \to R$ con $A \subseteq R^n$, A aperto.

Siano $\underline{x}^0 \in A$ e $\underline{u} \in R^n, \|\underline{u}\| = 1$ versore (determina una direzione e un verso).

Sia $\underline{x} = \underline{x}^0 + t\underline{u} \in A$ vettore uscente da $\underline{x}^0$ e parallelo a $\underline{u}$



$$\left\|\left(\underline{x}^0 + t\underline{u}\right) - \underline{x}^0\right\| = \|t\underline{u}\| = |t|\|\underline{u}\| = |t|$$

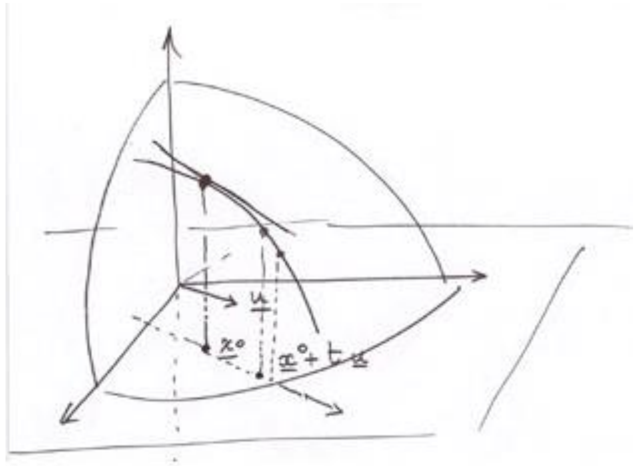
Il rapporto incrementale di f nel punto $\underline{x}^0$ e nella direzione $\underline{u}$ è

$$\frac{f\left(\underline{x}^0 + t\underline{u}\right) - f\left(\underline{x}^0\right)}{t}$$

e rappresenta il tasso di variazione di f nella direzione $\underline{u}$

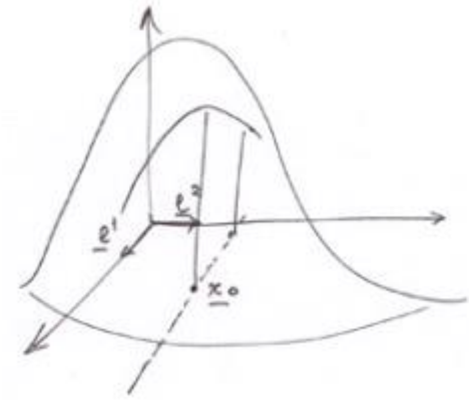
Se esiste finito $\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\underline{x}^0 + t\underline{u}\right) - f\left(\underline{x}^0\right)}{t} = l \in R$, f si dice derivabile in $\underline{x}^0$ nella direzione $\underline{u}$ e tale limite si indica come

$D_{\underline{u}} f\left(\underline{x}^0\right)$ **derivata direzionale in $\underline{x}^0$ nella direzione $\underline{u}$**



Definizione 32.2

$f:A\to R$ con $A\subseteq R^n$, A aperto, considerando le direzioni degli assi coordinati ossia i vettori fondamentali $\underline{e}^{(1)},\underline{e}^{(2)},\dots,\underline{e}^{(n)}$



si calcolano le così dette **derivate parziali** che si indicano nei seguenti modi:

$$D_{\underline{e}^{(i)}}f(\underline{x});\ f_i'(\underline{x});\ f_{x_i}(\underline{x});\ \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Se f è derivabile parzialmente per $\underline{x}\in A$, il vettore delle derivate parziali $\nabla f(\underline{x})=\begin{bmatrix} f_1'(\underline{x})\\ f_2'(\underline{x})\\ \vdots \\ f_n'(\underline{x})\end{bmatrix}$ si dice **gradiente** di f in $\underline{x}$ e si indica anche con **grad *f*.**

Al variare di $\underline{x}\in A$ il gradiente è una funzione vettoriale $\nabla f:A\to R^n$.

Osservazione: per calcolare più semplicemente le derivate parziali (derivate direzionali rispetto alle direzioni parallele agli assi coordinati) basta applicare le regole di derivazioni note per le funzioni di una variabile reale considerando variabile solo la componente relativa alla direzione considerata.

Esempio 32.1

$f:R^2\to R$ tale che $f(\underline{x})=e^{\sqrt{x_2-3x_1}}$

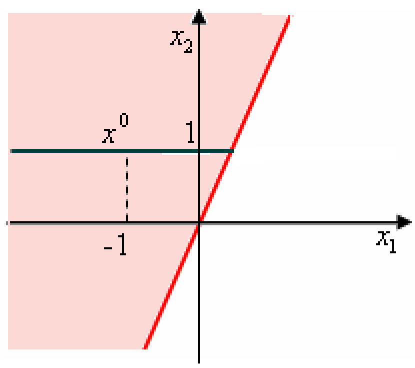
Il dominio è $D_f: x_2-3x_1\geq 0 \Leftrightarrow x_2\geq 3x_1$

Siano $\underline{x}^0=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=e^{\sqrt{x_2-3x_1}}\frac{-3}{2\sqrt{x_2-3x_1}}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=-\frac{3e^2}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=e^{\sqrt{x_2-3x_1}}\frac{1}{2\sqrt{x_2-3x_1}}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=-\frac{e^2}{4}$$

$$\nabla f(\underline{x}^0)=-\frac{e^2}{4}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

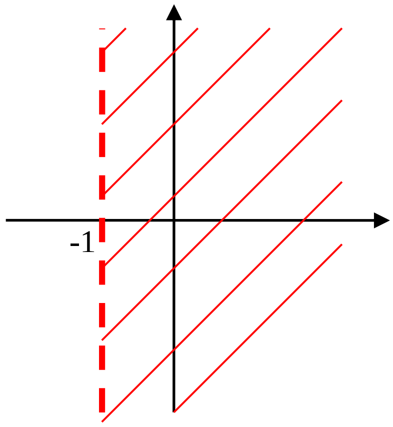


Esempio 32.2

$f: R^2 \to R$ tale che $f(x_1, x_2) = (1+x_1)^{x_2}$ definita in

$D_f: 1 + x_1 > 0 \Leftrightarrow x_1 > -1$

f è derivabile parzialmente in D_f; infatti le derivate sono:



$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2(1+x_1)^{x_2-1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} = (1+x_1)^{x_2}\ln(1+x_1) \text{ quindi}$$

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2(1+x_1)^{x_2-1} \\ (1+x_1)^{x_2}\ln(1+x_1) \end{bmatrix}.$$

Per esempio: $\nabla f(\underline{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln 2 \end{bmatrix}$.

Domanda chiave: ***Per le funzioni in più variabili c'è una relazione fra continuità e derivabilità analoga a quella per le funzioni da R in R?***

Sia $f: X \to R$ con $X \subseteq R^n$, f **derivabile parzialmente** <u>non</u> implica che *f* sia continua e viceversa.

Per verificarlo basta trovare un controesempio:

$f: R^2 \to R$

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

f non è continua; infatti

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} 2\cos\varphi\sin\varphi$$

dipende da φ quindi non esiste.

f è derivabile parzialmente in $\underline{x} = \underline{0}$; infatti

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{e}^{(1)}) - f(\underline{x}^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = f_1'(\underline{0})$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{e}^{(2)}) - f(\underline{x}^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = f_2'(\underline{0})$$

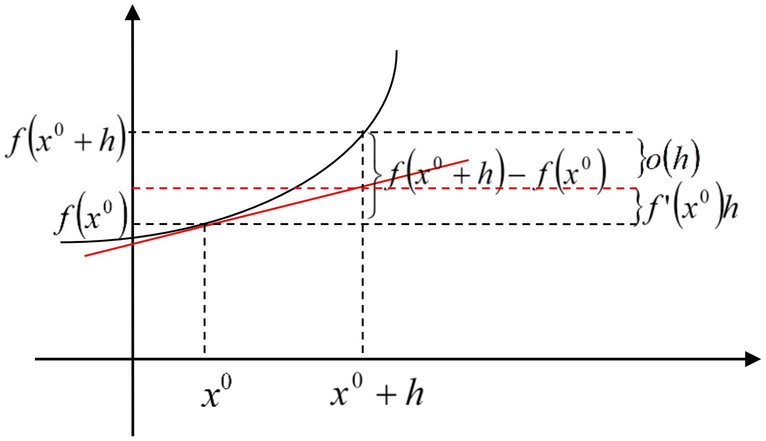
Differenziabilità

Ricordiamo il concetto di differenziale per una funzione di una variabile reale.
$f: A \to R$ con $A \subseteq R$, A aperto è differenziabile in $x^0 \in A$ se e solo se

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = f'(x^0)h + o(h) \text{ con } o(h) \text{ per } h \to 0;$$

ovvero

$$\Delta f = df + o(h) \text{ dove } df \text{ è una funzione lineare di } h.$$



Definizione 32.3
$f: A \to R$ con $A \subseteq R^n$, A aperto è differenziabile in $\underline{x}^0 \in A$ se e solo se esiste un vettore $\underline{a} \in R^n$ tale che $\forall \underline{h} \in R^n : \underline{x}^0 + \underline{h} \in A$

$$f(\underline{x}^0 + \underline{h}) - f(\underline{x}^0) = \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle + o(\|\underline{h}\|)$$

$$\text{con } o(\|\underline{h}\|) \text{ per } \underline{h} \to \underline{0} \text{ ovvero } \lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{o(\|\underline{h}\|)}{\|\underline{h}\|} = 0;$$

$o(\|h\|)$ è l'errore commesso approssimando $f(\underline{x}^0 + \underline{h}) - f(\underline{x}^0)$ con $\langle \underline{a}, \underline{h} \rangle$ ossia approssimando $f(\underline{x}^0 + \underline{h})$ con $f(\underline{x}^0) + \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle$, funzione lineare di *h*.

Se *f* è differenziabile il **differenziale di *f*** è

$$d(\underline{x}^0, \underline{h}) = \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle.$$

Osservazione
Come nel caso in una variabile, la differenziabilità di *f* in $\underline{x}^0$ corrisponde alla possibilità di approssimare la funzione nelle "vicinanze" di $\underline{x}^0$ con una funzione lineare. Nel caso in una variabile la variazione di *f* è espressa da *ah*, nel caso di funzione a più variabili la variazione di *f* è espressa dal prodotto scalare $\langle \underline{a}, \underline{h} \rangle = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots + a_n h_n$.

Esempio 32.3

$f: X \subseteq R^2 \to R$, $f(\underline{x}) = \ln x_1 x_2$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}$, $\underline{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{bmatrix}$

$$f\left(\underline{x}^0 + \underline{h}\right) \cong f\left(\underline{x}^0\right) + \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle \Rightarrow f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ e+1 \end{bmatrix}\right) \cong f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 1 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + \left(1 + e^{-1}\right) \cong 2.3679.$$

Calcolando esattamente si ha $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ e+1 \end{bmatrix}\right) = 2.0064$ quindi l'errore commesso è 0.3615.

Se si considera lo stesso punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}$ e un altro incremento $\underline{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, l'errore cambia:

$$f\left(\underline{x}^0 + \underline{h}\right) \cong f\left(\underline{x}^0\right) + \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle \Rightarrow f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ e \end{bmatrix}\right) \cong f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 1 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Calcolando esattamente si ha $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ e \end{bmatrix}\right) = 1.6931$ quindi l'errore commesso è 0.3069.

Domanda chiave: ***Per le funzioni in più variabili c'è una relazione fra continuità, derivabilità e differenziabilità analoga a quella per le funzioni da R in R?***
La risposta è **NO**, il seguente teorema **non è invertibile** ossia esistono funzioni derivabili parzialmente in un punto che non sono differenziabili in quel punto.

Teorema 32.1

$f: A \to R$ con $A \subseteq R^n$, A aperto e differenziabile in $\underline{x}^0 \in A$

$\Downarrow$

f è continua in $\underline{x}^0$,

f è derivabile parzialmente in $\underline{x}^0$ e

$$d\left(\underline{x}^0, \underline{h}\right) = \left\langle \nabla f\left(\underline{x}^0\right), \underline{h} \right\rangle \text{ ovvero } \underline{a} = \nabla f\left(\underline{x}^0\right)$$

Esempio 32.4

$f: X \subseteq R^2 \to R$, $f(\underline{x}) = \ln x_1 x_2$, $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}$, $\underline{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f_1^{'} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$f_2^{'} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}\right) = e^{-1}$$

Si ritrova il vettore $\underline{a} = \nabla f\left(\underline{x}^0\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{bmatrix}$ quindi

$$d\left(\underline{x}^0, \underline{h}\right) = \left\langle \nabla f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}\right), \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + e^{-1}.$$

Dimostrazione

1) f differenziabile in $\underline{x}^0 \Rightarrow f$ è continua in $\underline{x}^0$ ovvero la differenziabilità in $\underline{x}^0$ è C.S. per la continuità di f in $\underline{x}^0$.

f differenziabile in $\underline{x}^0 \Rightarrow f\left(\underline{x}^0 + \underline{h}\right) - f\left(\underline{x}^0\right) = \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle + o\left(\|\underline{h}\|\right)$ con $o\left(\|\underline{h}\|\right)$ per $\underline{h} \to \underline{0}$

$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} f\left(\underline{x}^0+\underline{h}\right)=\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\left[f\left(\underline{x}^0\right)+\left\langle \underline{a},\underline{h}\right\rangle+o\left(\|\underline{h}\|\right)\right]= f\left(\underline{x}^0\right)$ quindi f è continua in $\underline{x}^0$.

2) $\underline{a}=\nabla f\left(\underline{x}^0\right)$

Calcoliamo le derivate parziali di f usando la definizione:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\underline{x}^0+t\underline{e}^{(i)}\right)-f\left(\underline{x}^0\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left\langle \underline{a},t\underline{e}^{(i)}\right\rangle+o\left(\left\|t\underline{e}^{(i)}\right\|\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{ta_i+o(|t|)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0} a_i+\frac{o(|t|)}{t}=a_i \quad i=1,2,\dots,n$$

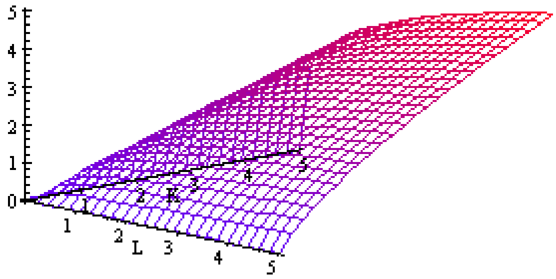
Quindi le derivate parziali di f coincidono con le componenti di $\underline{a}$. [CVD]

Definizione 32.4

$f\left(\underline{x}^0+\underline{h}\right)= f\left(\underline{x}^0\right)+d\left(\underline{x}^0,\underline{h}\right)+o\left(\|\underline{h}\|\right)= f\left(\underline{x}^0\right)+\left\langle\nabla f\left(\underline{x}^0\right),\underline{h}\right\rangle+o\left(\|\underline{h}\|\right)$ con $o\left(\|\underline{h}\|\right)$ per $\underline{h}\to\underline{0}$ è detta **formula di Taylor del primo ordine con centro** $\underline{x}^0$.

Applicazione 32.1

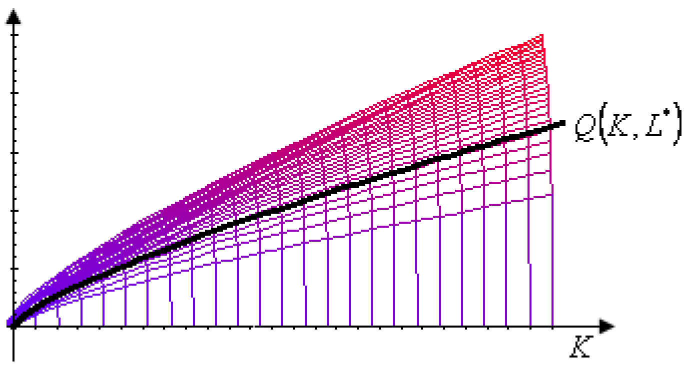
$Q(K,L)=4K^{3/4}L^{1/4}$ funzione di Cobb-Douglas è la quantità prodotta dove K è il capitale e L è la forza lavoro.



$\frac{\partial Q}{\partial K}(K^*,L^*)=3\left(\frac{L^*}{K^*}\right)^{1/4}$: la derivata parziale rispetto a K nel punto $\left(K^*,L^*\right)$ è la **produttività marginale del capitale.**ottenuta mantenendo fisso $L=L^*$

Analogamente si definisce

$\frac{\partial Q}{\partial L}(K^*,L^*)=\left(\frac{K^*}{L^*}\right)^{3/4}$ come **produttività marginale del lavoro.**



Il gradiente di $\nabla Q(K,L)=\begin{bmatrix}3\left(\frac{L}{K}\right)^{1/4}\\ \left(\frac{K}{L}\right)^{3/4}\end{bmatrix}$ e il differenziale di Q è $dQ=3\left(\frac{L}{K}\right)^{1/4}dK+\left(\frac{K}{L}\right)^{3/4}dL$.

Utilizzando il valore della funzione Q e delle sue derivate parziali in $\underline{x}^*=(10000,625)$ si può approssimare il valore di Q in un punto "non troppo distante" come potrebbe essere (10.010,623). Il valore della funzione in $\underline{x}^*=(10000,625)$ è $Q(10000,625)=20000$ e l'incremento della variabile indipendente è $\underline{h}=\begin{bmatrix}10\\-2\end{bmatrix}$ quindi

$$Q(10010,623)\approx Q(10,625)+\frac{\partial Q}{\partial K}(10000,625)\cdot 10+\frac{\partial Q}{\partial L}(10.000,625)\cdot(-2)=20.000+1{,}5\cdot 10+8(-2)=19.999$$

Il valore esatto è $Q(10.010,623)=19.998{,}967.....$ quindi l'errore commesso è "piccolo": $19.999-19.998{,}967.....=0{,}032...$

Applicazione 32.2

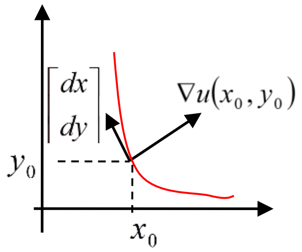
Se $u(x,y)$ è la funzione di utilità di un consumatore differenziabile, il differenziale nel punto (x_0,y_0)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

esprime la variazione approssimata della funzione di utilità in corrispondenza di variazioni dx e dy della quantità *x* e *y*.

Se considero il grafico di una curva d'indifferenza di una funzione di utilità *u* differenziabile il differenziale di *u* relativo a $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ tangente in (x_0,y_0) alla curva di indifferenza è nullo; infatti per il teorema di Dini o delle funzioni implicite si ha che:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)} \Leftrightarrow \text{i vettori } \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \text{ e } \nabla u(x_0,y_0) \text{ sono ortogonali}$$



ovvero

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)dy = 0$$

Da cui si ricava che il **saggio marginale di sostituzione** *SMS* è il rapporto fra le utilità marginali dei due beni.

Derivate di ordine superiore

$f: A \to R$ con $A \subseteq R^n$, *A* aperto

Se f è dotata di derivate parziali in ogni $\underline{x} \in A$ si hanno *n* funzioni corrispondenti alle *n* derivate parziali:

$$\underline{x} \mapsto f_i^{'}(\underline{x}),\ i = 1,2,\dots,n$$

Se anche $f_i^{'}(\underline{x}),\ i = 1,2,\dots,n$ sono dotate di derivate parziali in $\underline{x}$ allora si introducono le **derivate parziali seconde** di *f* in $\underline{x}$.

$$f_{ij}''(\underline{x});\ f_{x_i x_j}(\underline{x});\ \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Se $i = j$ si dicono **pure, se** $i \neq j$ si dicono **miste.**

Definizione 32.5

La matrice delle derivate parziali seconde $H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}''(\underline{x}) & f_{12}''(\underline{x}) & \cdots & f_{1n}''(\underline{x}) \\ f_{21}''(\underline{x}) & f_{22}''(\underline{x}) & \cdots & f_{2n}''(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}''(\underline{x}) & f_{n2}''(\underline{x}) & \cdots & f_{nn}''(\underline{x}) \end{bmatrix}$ si dice **Hessiano** o **Matrice hessiana.**

Teorema 32.5 (di Schwarz)

$f: A \to R$ con $A \subseteq R^n$, *A* aperto, $\underline{x}^0 \in A$.

f è dotata di derivate parziali seconde in un intorno di $\underline{x}^0$ e continue in $\underline{x}^0$

$$\Downarrow$$

$f_{ij}''\left(\underline{x}^0\right)=f_{ji}''\left(\underline{x}^0\right)$ ovvero l'hessiano in $\underline{x}^0$ è una matrice simmetrica.

Definizione 32.6

Sia $f: A \to R$ con $A \subseteq R^n$, *A* aperto, *f* differenziabile in *A*, se le derivate parziali sono a loro volta differenziabili allora *f* si dice **due volte differenziabile** e l'espressione

$$d^2 f(\underline{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}''(\underline{x}) dx_i dx_j$$

si dice il **differenziale secondo** di *f* in $\underline{x}$.

Si dimostra facilmente che il differenziale secondo in un punto $\underline{x}^0$ è una forma quadratica; infatti

$$d^2 f\left(\underline{x}^0\right) = \underline{dx}^T H_f\left(\underline{x}^0\right)\underline{dx}$$

Esempio 32.9

Data la funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, scrivere il differenziale primo e il differenziale secondo nel punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$dx_1 = x_1 - 0 = x_1, dx_2 = x_2 - 0 = x_2$ quindi $\underline{h} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f\left(\underline{x}^0\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, df(\underline{x}) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$

$H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f\left(\underline{x}^0\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (definita positiva)

$d^2 f(\underline{x}) = \underline{dx}^T H \underline{dx} = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2$

APPROFONDIMENTO

Dimostriamo ora con un controesempio che **la continuità e derivabilità parziale di *f* in $\underline{x}^0$ non è condizione sufficiente per la differenziabilità**; infatti esiste almeno una funzione continua e derivabile parzialmente in $\underline{x}^0$ ma **non differenziabile.**

Sia $f : R^2 \to R$

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

f è continua in $\underline{x}^0 = \underline{0}$; infatti

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3 \cos^3\varphi}{\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin\varphi^2\right)} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos^3\varphi = 0 = f(\underline{0}).$$

f è derivabile parzialmente in $\underline{x}^0 = \underline{0}$; infatti

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}\right) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1 = f_1'(\underline{0})$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix}\right) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 = f_2'(\underline{0})$$

f non è differenziabile in $\underline{x}^0 = \underline{0}$**,** si dimostra che non vale

$$f(\underline{0} + \underline{h}) = f(\underline{0}) + (1\cdot h_1 + 0\cdot h_2) + o(\|\underline{h}\|) \text{ con } o(\|\underline{h}\|) \text{ per } \underline{h} \to \underline{0}$$

ovvero

$$f(\underline{0} + \underline{h}) - f(\underline{0}) - (1\cdot h_1 + 0\cdot h_2) \neq o(\|\underline{h}\|) \text{ con } o(\|\underline{h}\|) \text{ per } \underline{h} \to \underline{0}.$$

Infatti

$$f(\underline{0} + \underline{h}) - f(\underline{0}) - (1\cdot h_1 + 0\cdot h_2) = \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - h_1 = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos\varphi\sin\varphi^2 = 0 \quad \text{ma non è } o(\|\underline{h}\|) \text{ per } \underline{h} \to \underline{0}$$

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{\dfrac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\varphi\sin\varphi^2}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos\varphi\sin\varphi^2 \text{ dipende da } \varphi \text{ quindi}$$

$f(\underline{0} + \underline{h}) - f(\underline{0}) - (1\cdot h_1 + 0\cdot h_2)$ non è un $o(\|\underline{h}\|)$ per $\underline{h} \to \underline{0}$.

Esiste anche una **condizione sufficiente per la differenziabilità**:

Teorema 32.2

$f : A \to R$ con $A \subseteq R^n$, A aperto e derivabile parzialmente con derivate parziali continue

$$\Downarrow$$

f è differenziabile in $\underline{x}^0$

Osservazione: il teorema non è invertibile; infatti con un controesempio si potrebbe dimostrare che **la continuità delle derivate parziali non è necessaria per la differenziabilità** ma nelle applicazioni, quando le derivate parziali non sono continue è "molto probabile" che la funzione non sia differenziabile.

Esempio 32.5

$f: R^3 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = e^{x_1^2 x_2} + x_2 x_3 + x_1$ è continua e ha derivate parziali continue in R^3:

$$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 e^{x_1^2 x_2} + 1$$

$$f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 e^{x_1^2 x_2} + x_3$$

$$f_3' = \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2$$

$$df(\underline{x}, \underline{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} h_3 =$$

$$= \left(2x_1 x_2 e^{x_1^2 x_2} + 1\right) h_1 + \left(x_1^2 e^{x_1^2 x_2} + x_3\right) h_2 + x_2 h_3$$

Come per le funzioni in una variabile, le componenti del vettore $\underline{h}$ possono essere indicate come differenziali delle componenti di $\underline{x}$, ponendo $\underline{h} = \underline{dx}$ si ha:

$$df(\underline{x}, \underline{dx}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 =$$

$$= \left(2x_1 x_2 e^{x_1^2 x_2} + 1\right) dx_1 + \left(x_1^2 e^{x_1^2 x_2} + x_3\right) dx_2 + x_2 dx_3$$

Quindi il differenziale relativo al punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è $df\left(\underline{x}^0, \underline{dx}\right) = dx_1 + 2dx_2$ e

la formula di Taylor **del primo ordine con centro** $\underline{x}^0$ è

$f(\underline{x}) = f\left(\underline{x}^0\right) + dx_1 + 2dx_2 + o(\|\underline{dx}\|)$ con $o(\|\underline{dx}\|)$ per $\underline{dx} \to \underline{0}$

Domanda chiave: ***E' possibile calcolare la derivata direzionale di una funzione in una qualunque direzione utilizzando il gradiente*?**

Teorema 32.3

$f: A \to R$ con $A \subseteq R^n$, A aperto e differenziabile in $\underline{x}^0 \in A$

$$\Downarrow$$

f è derivabile in ogni direzione $\underline{u}\ (\|\underline{u}\| = 1)$ uscente da $\underline{x}^0$ e

$$D_{\underline{u}} f\left(\underline{x}^0\right) = \left\langle \nabla f\left(\underline{x}^0\right), \underline{u} \right\rangle$$

Esempio 32.6

Riprendiamo l'esempio 32.1.

$f: R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 - 2x_1 x_2$. Il dominio è R^2

Siano $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f\left(\underline{x}^0\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$D_{\underline{u}} f\left(\underline{x}^0\right) = \left\langle \nabla f\left(\underline{x}^0\right), \underline{u} \right\rangle = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = -2$; lo stesso valore era stato ottenuto utilizzando la definizione di derivata direzionale.

Esempio 32.7

$f : R^3 \rightarrow R$ tale che $f(\underline{x}) = e^{x_1^2 x_2} + x_2 x_3 + x_1$

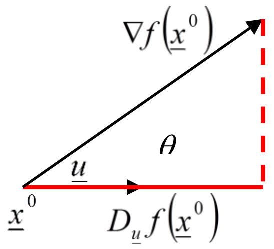
$$\nabla f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se si considera il versore $\underline{u} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$D_{\underline{u}} f\left(\underline{x}^0\right) = \left\langle \nabla f\left(\underline{x}^0\right), \underline{u} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Interpretazione geometrica di $D_{\underline{u}} f\left(\underline{x}^0\right) = \left\langle \nabla f\left(\underline{x}^0\right), \underline{u} \right\rangle$

La derivata direzionale $D_{\underline{u}} f\left(\underline{x}^0\right)$ è la proiezione nella direzione $\underline{u}$ del gradiente in $\underline{x}^0$ ovvero misura il tasso di variazione di *f* muovendosi da $\underline{x}^0$ nella direzione $\underline{u}$.



$D_{\underline{u}} f\left(\underline{x}^0\right)$ si può esprimere in funzione dell'angolo formato dal gradiente e dalla direzione.

$$\left\langle \nabla f\left(\underline{x}^0\right), \underline{u} \right\rangle = \left\| \nabla f\left(\underline{x}^0\right) \right\| \left\| \underline{u} \right\| \cos \vartheta$$

Dal fatto che $\cos \vartheta$ è massimo quando $\vartheta = 0$ si deduce che il tasso di variazione è massimo quando la direzione $\underline{u}$ è la stessa di $\nabla f\left(\underline{x}^0\right)$ da cui il seguente teorema:

Teorema 32.4

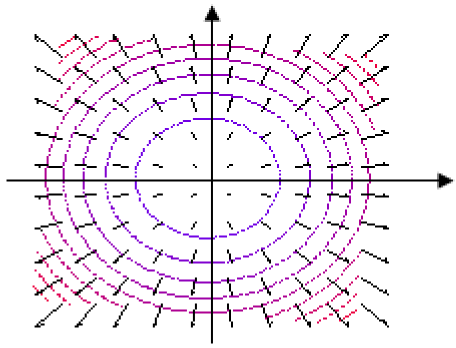
$$f : A \to R \text{ con } A \subseteq R^n, A \text{ aperto}, \quad f \in C^1(A),$$
$$\nabla f\left(\underline{x}^0\right) \neq \underline{0}$$
$$\Downarrow$$

$\nabla f\left(\underline{x}^0\right)$ applicato in $\underline{x}^0$ indica la direzione e il verso in cui *f* aumenta "più rapidamente".

Esempi 32.8

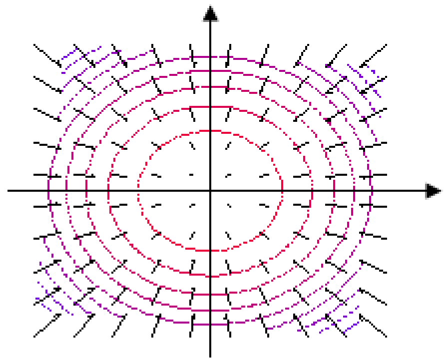
1) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2\underline{x}$$



2) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = -x_1^2 - x_2^2$

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2\underline{x}$$



In entrambi i casi il vettore gradiente è proporzionale al vettore in cui viene calcolato quindi il suo modulo aumenta "allontanandosi" dall'origine e le sue direzioni descrivono i raggi uscenti dall'origine, sono le direzioni di massima crescita (caso 1) o decrescita (caso 2) della funzione in ogni punto.

Formula di Taylor di ordine 2

Teorema 32.6

$f : A \to R$ con $A \subseteq R^n$, A aperto e differenziabile due volte in $\underline{x}^0 \in A$

$$\Downarrow$$

Esiste la formula di Taylor di f al secondo ordine con centro $\underline{x}^0$

$$f\left(\underline{x}^0 + \underline{h}\right) - f\left(\underline{x}^0\right) = df\left(\underline{x}^0\right) + \frac{1}{2} d^2 f\left(\underline{x}^0\right) + o\left(\left\|\underline{h}\right\|^2\right) =$$

$$= \underline{h}^T \nabla f\left(\underline{x}^0\right) + \frac{1}{2} \underline{h}^T H_f\left(\underline{x}^0\right)\underline{h} + o\left(\left\|\underline{h}\right\|^2\right)$$

$o\left(\left\|\underline{h}\right\|^2\right)$ *per* $\underline{h} \to \underline{0}$

Esempio 32.9 (continua)

Scrivere la formula di Taylor al secondo ordine nel punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ della funzione

$f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$

La formula di Taylor al secondo ordine è:

$$f\left(\underline{x}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2} d^2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + o\left(\left\|\underline{h}\right\|^2\right) =$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(2x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2}\right) + o\left(\left\|\underline{h}\right\|^2\right)$$

$$= x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + o\left(\left\|\underline{h}\right\|^2\right) o\left(\left\|\underline{h}\right\|^2\right) \ per\ \underline{h} \to \underline{0}$$

L'approssimazione al secondo ordine della funzione $f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ in un punto $\underline{x}$ "vicino" a $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è:

$$f\left(\underline{x}\right) \approx f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2} d^2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$$

In questo caso, poiché l'approssimazione coincide con la funzione stessa, l'errore commesso è 0.