Lezione 33 – Massimi e minimi liberi

Problema 33.1

Un monopolista produce un unico bene ed ha due tipi di clienti:

- I clienti di tipo A sono disposti a pagare il prezzo di 60-2Q_1 per ogni unità di bene quando la quantità offerta è Q_1
- I clienti di tipo B sono disposti a pagare il prezzo di 180-3,5Q_2 per ogni unità di bene quando la quantità offerta è Q_2
- Il costo di produzione di Q unità è 180+40Q

Quanto dovrebbe offrire il monopolista sul mercato al fine di rendere massimo il profitto?

Definizione 33.1

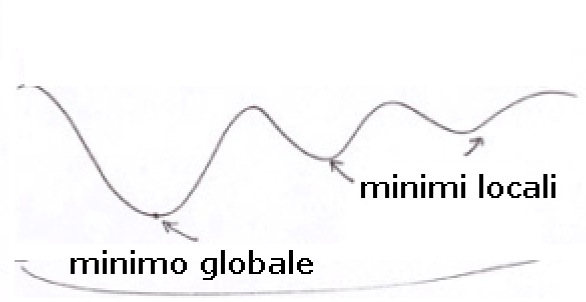
$f : X \to R$, $X \subseteq R^n$ $\underline{x}^0 \in X$

Se $\forall \underline{x} \in X$ $f(\underline{x}) \le f(\underline{x}^0)$ allora $\underline{x}^0 \in X$ è detto punto di massimo globale (assoluto).

Se $\exists I(\underline{x}^0) : \forall \underline{x} \in I(\underline{x}^0)$ $f(\underline{x}) \le f(\underline{x}^0)$ allora $\underline{x}^0 \in X$ è detto punto di massimo locale (relativo).

Se $\forall \underline{x} \in X$ $f(\underline{x}) \ge f(\underline{x}^0)$ allora $\underline{x}^0 \in X$ è detto punto di minimo globale (assoluto).

Se $\exists I(\underline{x}^0) : \forall \underline{x} \in I(\underline{x}^0)$ $f(\underline{x}) \ge f(\underline{x}^0)$ allora $\underline{x}^0 \in X$ è detto punto di minimo locale (relativo).



Un punto che è o di massimo o di minimo globale (locale) è detto **punto di estremo globale (locale).**

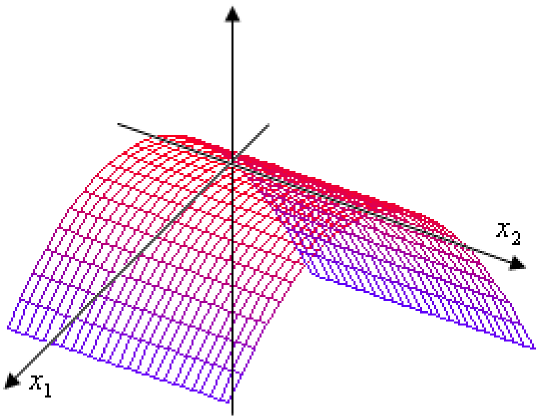
Esempio 33.1

$f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = -x_1^2$

$f\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = 0$ quindi $f(\underline{x}) = -x_1^2 \le f(\underline{0}) = 0 \ \forall \underline{x} \in R^2$

$f\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right) = 0$ quindi $f(\underline{x}) = -x_1^2 \le f\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right) = 0 \ \forall \underline{x} \in R^2$

Ogni punto dell'asse x_2 è punto di massimo assoluto.



Condizione necessaria del 1° ordine per estremi locali

Teorema 33.1

$$f : X \to R\,,\ X \subseteq R^n \text{ aperto,}$$
$$f \text{ è differenziabile in } \underline{x}^0 \in X$$
$$\underline{x}^0 \text{ è punto di estremo locale}$$
$$\Downarrow$$

C.N. del 1° ordine: $\nabla f\left(\underline{x}^0\right) = 0$ **ovvero** $\underline{x}^0$ è punto critico (stazionario) di f

Dimostrazione

Si applica il teorema di Fermat alle n funzioni in una variabile ottenute considerando costanti n-1 variabili e facendo variare la i-ma componente: $h_i(x_i) = f\left(x_1^0, \ldots, x_i, \cdots, x_n^0\right)$. Tali funzioni sono differenziabili e la loro derivata è $h_i'(x_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^0, \ldots, x_i, \cdots, x_n^0\right)$.

Poiché $\underline{x}^0$ è punto di estremo locale per f si ha $h_i'\left(x_i^0\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\underline{x}^0\right) = 0$, i=1,…n. [CVD]

Esempi 33.2

1) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^n + x_2^n$ con $n \in N_0$

$\nabla f = \begin{bmatrix} n x_1^{n-1} \\ n x_2^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ è l'unico punto che, per ognuna di queste funzioni, potrebbe essere di estremo locale, in seguito vedremo che a volte lo è, a volte no.

2) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2$

$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 4x_2 - 2 = 0 \end{cases}$

$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ è l'unico punto che potrebbe essere di estremo locale.

3) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1$

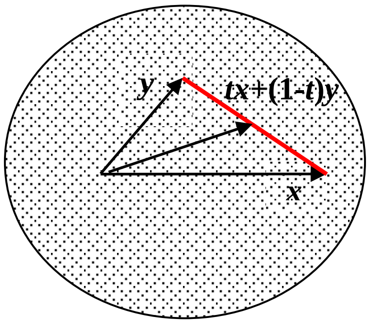
$\nabla f = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1, x_2 = 0$

$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono gli unici punti che potrebbero essere di estremo locale.

Massimi e minimi di funzioni concave o convesse

Definizione 33.3

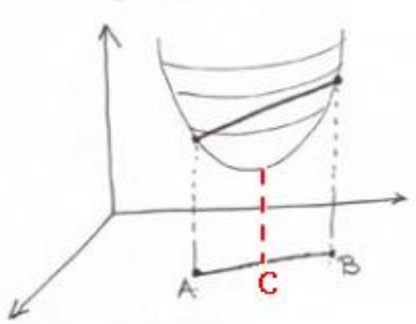
$C \subseteq R^n$ è un insieme **convesso** $\Leftrightarrow \forall \underline{x}, \underline{y} \in C, \forall t \in [0,1], t\underline{x} + (1-t)\underline{y} \in C$



Definizione 33.4

$f : C \to R$, $C \subseteq R^n$ è un **insieme convesso**, la funzione *f* si dice

- ✓ **convessa** se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in C, \forall t \in [0,1]\ f(t\underline{x} + (1-t)\underline{y}) \leq tf(\underline{x}) + (1-t)f(\underline{y})$
- ✓ **strettamente convessa** se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in C, \forall t \in [0,1]\ f(t\underline{x} + (1-t)\underline{y}) < tf(\underline{x}) + (1-t)f(\underline{y})$



- ✓ **concava** se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in C, \forall t \in [0,1]\ f(t\underline{x} + (1-t)\underline{y}) \geq tf(\underline{x}) + (1-t)f(\underline{y})$
- ✓ **strettamente concava** se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in C, \forall t \in [0,1]\ f(t\underline{x} + (1-t)\underline{y}) > tf(\underline{x}) + (1-t)f(\underline{y})$

I due teoremi che seguono riguardano funzioni $f : C \to R$, $C \subseteq R^n$ aperto e convesso

Teorema 33.2

Se *f* è differenziabile e **convessa** (**concava**)

$\nabla f(\underline{x}^0) = 0$ **ovvero** $\underline{x}^0$ è punto critico (stazionario) di *f*

$$\Updownarrow$$

$\underline{x}^0$ è punto di **minimo** (**massimo**) globale

Teorema 33.3

Se *f* è differenziabile due volte

f è **convessa** (**concava**)

$$\Updownarrow$$

$d^2 f(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{x}^0)^T H(\underline{x} - \underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0) \geq 0\ \forall \underline{x} \in C$ cioè

è una forma quadratica **semidefinita positiva** (**negativa**)

Considerando i due teoremi si ottiene che, se *f* differenziabile due volte,
condizione sufficiente affinché un punto sia di minimo globale (massimo globale) è che

$$\nabla f(\underline{x}^0) = 0$$

$$d^2 f(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{x}^0)^T H(\underline{x} - \underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0) \geq 0\ \forall \underline{x} \in C$$

Esempi 33.3

1) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^{\,2} + 2x_2^2 - 2x_2$, abbiamo visto che l'unico punto critico è $\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

$$H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \left.\begin{array}{c} a_{11} = 2 > 0 \ \forall \underline{x} \in R^2 \\ \det H_f(\underline{x}) = 8 > 0 \ \forall \underline{x} \in R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow H_f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in R^2 \ \text{ semidefinita positiva}$$

quindi *f* è convessa e il punto critico $\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ è punto di minimo assoluto o globale.

2) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^4 + x_2^4$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1^3 \\ 4x_2^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{punto critico.}$$

$H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 12x_1^{\,2} & 0 \\ 0 & 12x_2^{\,2} \end{bmatrix}$ è semidefinita positiva per ogni $\underline{x} \in R^2$ quindi f è convessa e il punto $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è di minimo assoluto o globale; infatti $x_1^4 + x_2^4 \geq 0 \Rightarrow f(\underline{x}) = f(\underline{0}) \ \ \forall \underline{x} \in R^2$.

Applicazione 33.1

Il profitto si ottiene come differenza tra ricavi totali e costi totali:

$$RT = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (60 - 2Q_1)Q_1 + (180 - 3{,}5Q_2)Q_2$$

$$CT = 180 + 40Q = 180 + 40(Q_1 + Q_2)$$

$$P = (60 - 2Q_1)Q_1 + (180 - 3{,}5Q_2)Q_2 - (180 + 40(Q_1 + Q_2))$$

I punti stazionari di *P* sono tali che:

$$\begin{cases} 60 - 4Q_1 - 40 = 0 \\ 180 - 7Q_2 - 40 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 5 \\ Q_2 = 20 \end{cases}$$

Controllo l'Hessiano $H = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$, $a_{11} = -4$, $\det H = 28 > 0$

quindi la matrice hessiana è definita negativa, dunque la funzione di profitto è strettamente concava, quindi Q_1=5 e Q_2=20 è punto di massimo assoluto o globale.

Abbiamo visto che per le **funzioni convesse (concave)** $\nabla f(\underline{x}^0) = 0$ è **condizione necessaria e sufficiente** affinché $\underline{x}^0$ sia di minimo (massimo) globale.

Per le altre funzioni le condizioni che si introdurranno riguardano solo i punti di estremo locale in quanto si considera *f* solo relativamente ad un intorno di $\underline{x}^0$.

Condizione sufficiente del 2° ordine per estremi locali

Teorema 33.4 (C.S.)

$$f : A \to R, \ A \subseteq R^n \ \text{ aperto}, \ f \in C^2(A)$$

$$\nabla f(\underline{x}^0) = 0$$

$$d^2 f = (\underline{x} - \underline{x}^0)^T H_f(\underline{x}^0)(\underline{x} - \underline{x}^0) > 0 \ (< 0) \ \forall \underline{x} \in I(\underline{x}^0), \underline{x} \neq \underline{x}^0 \text{ cioè}$$

il differenziale secondo è **definito positivo** (**negativo**) in un intorno di $\underline{x}^0$

$$\Downarrow$$

$\underline{x}^0 \in A$ punto di **minimo** (**massimo**) relativo o locale per *f*

Esempi 33.4

1) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^3 + x_2^3$, $\nabla f = \begin{bmatrix} 3x_1^2 \\ 3x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ punto critico.

$H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ è semidefinita ma non definita e il punto $\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ non è di estremo; infatti se $x_1 > -x_2$ si ha $f(\underline{x}) > f(\underline{0})$ e se $x_1 < -x_2$ si ha $f(\underline{x}) < f(\underline{0})$ quindi non esiste un intorno del punto critico $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ per cui $f(\underline{x}) \le f(\underline{0})$ o $f(\underline{x}) \ge f(\underline{0})$ $\forall \underline{x} \in I(\underline{0})$.

2) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1$

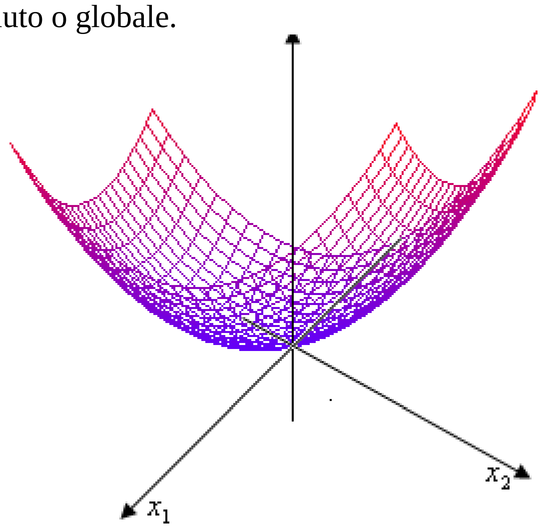
$\nabla f = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1, x_2 = 0$, $H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$H_f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ è definita positiva quindi il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è di minimo locale $H_f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ è indefinita quindi il punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è un punto di sella.

3) $f : R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^{\ 2} + x_2$

$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{4}, \underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ è punto critico e

$H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ è definita positiva quindi per il teorema 33.3 il punto critico $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ è di minimo assoluto o globale.



APPROFONDIMENTO

Dimostrazione del teorema 33.4

Nella formula di Taylor al secondo ordine $\nabla f\left(\underline{x}^0\right)=\underline{0}$ quindi

$$f\left(\underline{x}\right)= f\left(\underline{x}^0\right)+\left(\underline{x}-\underline{x}^0\right)^T H_f\left(\underline{x}^0\right)\left(\underline{x}-\underline{x}^0\right)+o\left(\left\|\underline{x}-\underline{x}^0\right\|^2\right),\ \underline{x}\in I\left(\underline{x}^0\right)$$

se si sceglie $\underline{x}$ sufficientemente vicino a $\underline{x}^0$, $o\left(\left\|\underline{x}-\underline{x}^0\right\|^2\right)$ risulta trascurabile e

$$f\left(\underline{x}\right)- f\left(\underline{x}^0\right)\approx\left(\underline{x}-\underline{x}^0\right)^T H_f\left(\underline{x}^0\right)\left(\underline{x}-\underline{x}^0\right)$$

quindi, essendo $\left(\underline{x}-\underline{x}^0\right)^T H_f\left(\underline{x}^0\right)\left(\underline{x}-\underline{x}^0\right)<0\ (>0)$, $\underline{x}^0$ è punto di massimo (minimo) relativo o locale.

Osservazione importante: per una funzione qualsiasi **non** esite una condizione sia necessaria che sufficiente affinché $\underline{x}^0$ sia di minimo (massimo).

Esistono funzioni che hanno in un punto $\underline{x}^0$ un massimo o un minimo ma il loro differenziale secondo ovvero l'hessiano è solo semidefinito e funzioni il cui hessiano è semidefinito ma il punto non è né di massimo né di minimo.

Esempio 33.5

$f: R^2 \to R$ tale che $f(\underline{x}) = x_1^2 x_2^{\ 2}$

$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^{\ 2} \\ 2x_1^2 x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f\left(\underline{x}\right)=0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0\ , \underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è punto critico e

$H_f\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} 2x_2^2 & 4x_1 x_2 \\ 4x_1 x_2 & 2x_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ è semidefinita, in questo caso il punto critico

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è di minimo ma questo si può provare osservando che per ogni $\underline{x}$ si ha $x_1^2 x_2^2 \geq 0$ quindi

$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è punto di minimo assoluto.