Lezione 34 – Estremi vincolati con vincoli di uguaglianza per funzioni di due variabili

Problema 34.1

Se $f(x, y)$ è la funzione di produzione di un bene con il vincolo $x + 2y = 1$ dove *x* e *y* sono le quantità di due materie prime necessarie per produrre un'unità prodotta.
Si vuole trovare la combinazione (*x*, *y*) che massimizza la produzione.

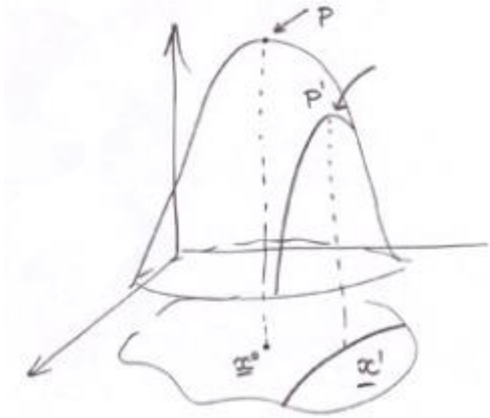
Nella ricerca dei punti di estremo di una funzione

$$f : X \to R\,,\ X \subseteq R^n$$

differenziabile in *X*, abbiamo esaminato il caso in cui il domino *X* è aperto, tale ipotesi risulta cruciale in quanto:

1. Se ***X* è aperto** non è garantita l'esistenza di punti di estremo ma esistono teoremi che determinano condizioni necessarie e sufficienti.
2. Se ***X* è chiuso e limitato (compatto)** i punti di estremo esistono in quanto il teorema di Weierstrass per funzioni continue garantisce l'esistenza di un massimo e di un minimo assoluto. I punti di estremo potrebbero essere sia interni che sulla frontiera di *X*. In tal caso la ricerca va fatta per i punti interni come per i problemi non vincolati e per i punti di frontiera studiando l'andamento della funzione in tali punti. Infine, si confrontano i valori ottenuti per determinare gli estremi assoluti e locali.
3. Se ***X* è chiuso e non limitato** i punti di estremo possono non esistere.

Una funzione differenziabile in ***X* è chiuso e limitato** può avere punti di estremo interni a *X* (stazionari) e punti di estremo sulla frontiera (non necessariamente stazionari).

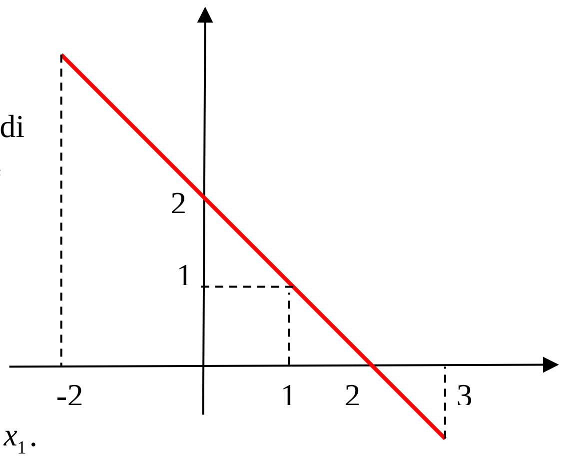


Metodo di sostituzione

Esempio 34.1

$f : A \to R,\ A \subset R^2$ tale che $f(\underline{x}) = x_1 x_2$

1) $A = \{\underline{x} \in R^2 : x_1 + x_2 = 2\}$ è insieme chiuso non limitato quindi non è garantita l'esistenza degli estremi, tuttavia si vedrà che ammette massimo



$x_2 = -x_1 + 2$, sostituendo nella funzione si ottiene:

$f(x_1) = x_1(-x_1 + 2)$

$f'(x_1) = -2x_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$

$f''(x_1) = -2 < 0$

Quindi $x_1 = 1$ è punto di massimo per la funzione nella variabile x_1.

L'unico estremo vincolato è nel punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, punto di massimo relativo che risulta anche assoluto.

2) $A = \{\underline{x} \in R^2 : x_1 + x_2 = 2; -2 \le x_1 \le 3\}$ è insieme chiuso e limitato quindi, grazie al teorema di Weierstrass, è garantita l'esistenza degli estremi assoluti.

a) Il punto $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, punto di massimo relativo interno e $f(\underline{x}^0) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1$.

b) Negli estremi del segmento la funzione assume i valori:

$f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = -8$, $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -3$ per cui il punto $\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ è di minimo relativo, $\underline{x}^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ è di minimo assoluto e $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è punto di massimo assoluto.

Metodo delle curve di livello

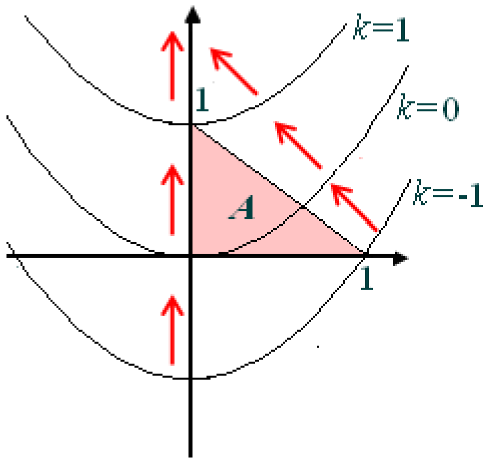
Esempio 34.2

$f : A \to R,\ A \subset R^2$ tale che

$f(\underline{x}) = -x_1^2 + x_2$

$A = \{\underline{x} \in R^2 : x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_1 + x_2 - 1 \le 0\}$

$f(\underline{x}) = -x_1^2 + x_2 = k,\ k \in R$ è l'equazione delle curve di livello.



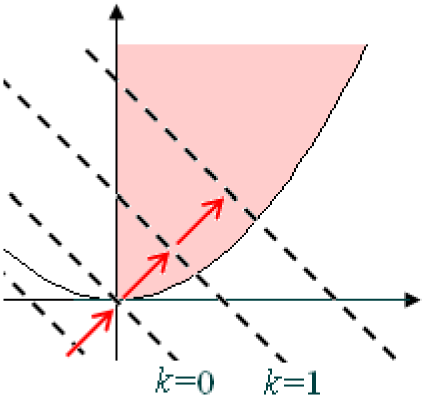
Al crescere di k le curve di livello si spostano verso l'alto indicando che il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è di minimo assoluto e che il punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è di massimo assoluto in A.

$$\max f \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \min f \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio 34.3

$\min f(\underline{x}) = x_1 + x_2$ soggetta ai vincoli $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_1^2 - x_2 \le 0 \end{cases}$

$f(\underline{x}) = x_1 + x_2 = k,\ k \in R$ è l'equazione delle curve di livello.

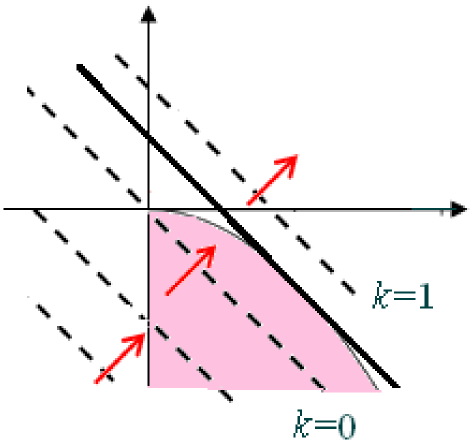


Al crescere di k le curve di livello si spostano verso l'alto indicando che il punto di minimo assoluto è $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Non esiste massimo assoluto in quanto la funzione non è limitata in un dominio non è limitato.

Esempio 34.4

$\min f(\underline{x}) = x_1 + x_2$ soggetta ai vincoli $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_1^{\ 2} + x_2 \leq 0 \end{cases}$

$f(\underline{x}) = x_1 + x_2 = k,\ k \in R$ è l'equazione delle curve di livello.



Al crescere di k le curve di livello si spostano verso l'alto indicando che il punto di massimo assoluto è il punto di tangenza fra una curva di livello e la frontiera del vincolo $x_2 = -x_1^{\ 2}$. Il problema è come determinarlo esattamente.

In questo caso si può imporre che il sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1^{\ 2} + x_2 = 0 \end{cases}$ ossia $x_1^{\ 2} - x_1 + k = 0$

abbia una sola soluzione, si ottiene $\Delta = 1 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$ da cui $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$.

Non esiste minimo assoluto in quanto la funzione non è limitata in un dominio non è limitato.

Nei casi 34.2 e 34.3 i punti di estremo sono punti in cui nel punto di ottimo non esiste la tangente al vincolo, tali punti di dicono **non regolari**.

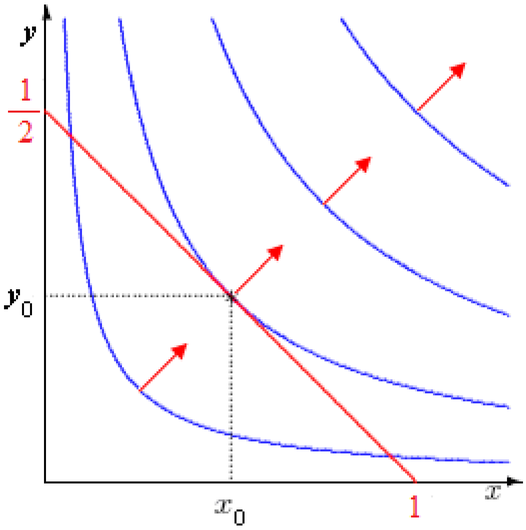
Nel caso 34.4 nel punto di ottimo la funzione è differenziabile, in questo caso la condizione necessaria per l'esistenza di tale ottimo è la tangenza del vincolo ad una curva di livello della funzione.

La teoria dell'ottimizzazione vincolata fornisce strumenti per la determinazione in generale dei punti di tangenza fra curve di livello e frontiera del vincolo.

Applicazione 34.1

Se $f(x, y)$ è la funzione di utilità di un consumatore con il vincolo $x + 2y = 1$.

La combinazione di materie prime (x_0,y_0) che massimizza la produzione è quello in corrispondenza del quale la curva di livello di f è tangente alla retta $x + 2y = 1$.



APPROFONDIMENTO

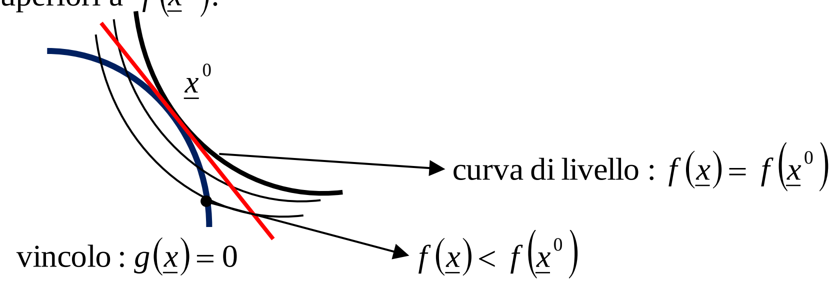
Un problema di massimo o di minimo con vincoli di uguaglianza si formalizza così:

$$f,g : A \to R,\ A \subseteq R^2 \text{ aperto, } f,g \in C^1(A)$$
determinare gli estremi di $f(\underline{x})$ ristretta a
$$C_0 = \{\underline{x} \in R^2 : g(\underline{x}) = 0\}$$
ossia
$$\max, \min f(\underline{x}) \text{ soggetta a } g(\underline{x}) = 0$$

Teorema 34.1

$$f,g : A \to R,\ A \subseteq R^2 \text{ aperto, } f,g \in C^1(A), C_0 = \{\underline{x} \in R^2 : g(\underline{x}) = 0\}$$
$\underline{x}^0 \in C_0$ è punto di minimo (massimo) relativo della funzione ristretta a C_0
$$\Downarrow$$
$$g(\underline{x}^0) = 0$$
$$\det\begin{bmatrix} f_{x_1}(\underline{x}^0) & f_{x_2}(\underline{x}^0) \\ g_{x_1}(\underline{x}^0) & g_{x_2}(\underline{x}^0) \end{bmatrix} = 0 \ \textbf{ ossia } \ \begin{array}{l} f_{x_1}(\underline{x}^0) = \lambda g_{x_1}(\underline{x}^0) \\ f_{x_2}(\underline{x}^0) = \lambda g_{x_2}(\underline{x}^0) \end{array}$$

Geometricamente questo significa che la curva di livello di f in $\underline{x}^0$ è tangente alla curva $g(\underline{x}) = 0$; infatti se $\underline{x}^0$ è punto di massimo vincolato, muovendosi lungo la curva $g(\underline{x}) = 0$ la funzione assume valori non superiori a $f(\underline{x}^0)$.



La condizione di tangenza si ottiene applicando il teorema di Dini i coefficienti angolari della tangente in $\underline{x}^0$

1. alla curva di livello di f è $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{f_{x_1}(\underline{x}^0)}{f_{x_2}(\underline{x}^0)}$

2. al vincolo $g(\underline{x}) = 0$, la curva di livello di g, è $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{g_{x_1}(\underline{x}^0)}{g_{x_2}(\underline{x}^0)}$

Uguagliando i due coefficienti angolari si ottiene
$$\frac{f_{x_1}(\underline{x}^0)}{f_{x_2}(\underline{x}^0)} = \frac{g_{x_1}(\underline{x}^0)}{g_{x_2}(\underline{x}^0)} \Rightarrow \frac{f_{x_1}(\underline{x}^0)}{g_{x_1}(\underline{x}^0)} = \frac{f_{x_1}(\underline{x}^0)}{g_{x_1}(\underline{x}^0)} = \lambda \Rightarrow \begin{array}{l} f_{x_1}(\underline{x}^0) = \lambda g_{x_1}(\underline{x}^0) \\ f_{x_2}(\underline{x}^0) = \lambda g_{x_2}(\underline{x}^0) \end{array}$$
La condizione di tangenza è data quindi dal parallelismo fra ∇f e ∇g ossia

$$\nabla f(\underline{x}^0) = \lambda \nabla g(\underline{x}^0)$$

In conclusione la **condizione necessaria** (C.N.) affinché il punto $\underline{x}^0 \in C_0$ sia soluzione del problema di ottimo vincolato è che esista λ_0 per cui $(\underline{x}^0, \lambda_0)$ è punto stazionario della funzione lagrangiana, ovvero sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_{x_1}(\underline{x}^0) - \lambda_0 g_{x_1}(\underline{x}^0) = 0 \\ f_{x_2}(\underline{x}^0) - \lambda_0 g_{x_2}(\underline{x}^0) = 0 \\ g(\underline{x}^0) = 0 \end{cases}$$

La **condizione necessaria** può essere scritta anche così:

$$\begin{cases} \nabla L(\underline{x}^0, \lambda_0) = \underline{0} \\ g(\underline{x}^0) = 0 \end{cases}$$

dove la funzione $L(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ è la **funzione Lagrangiana**

e λ è detto **moltiplicatore di Lagrange**

Esempio 34.5

$f : A \to R,\ A \subset R^2$ tale che

$f(\underline{x}) = x_1 x_2$

$A = \{\underline{x} \in R^2 : x_1 + x_2 = 2\}$

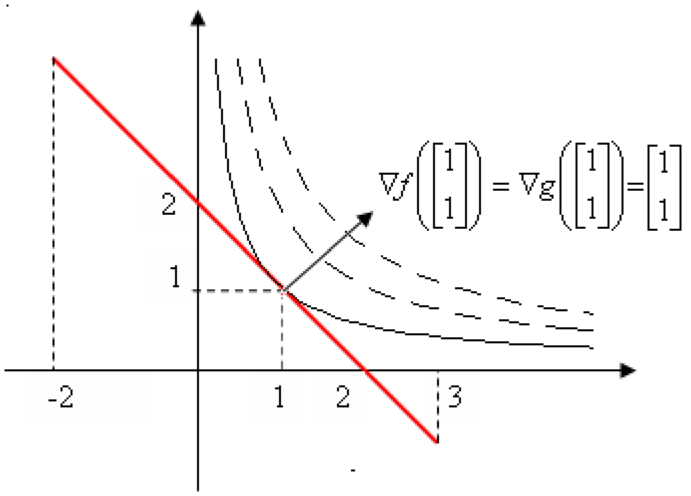
Tutti i punti ammissibili sono regolari; infatti $\nabla g(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \underline{0}$

$L(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x}) = x_1 x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 2)$

Per trovare i punti candidati ad essere soluzione del problema si risolve il sistema

$$\begin{cases} L_{x_1} = f_{x_1}(\underline{x}) - \lambda g_{x_1}(\underline{x}) = x_1 - \lambda = 0 \\ L_{x_2} = f_{x_2}(\underline{x}) - \lambda g_{x_2}(\underline{x}) = x_2 - \lambda = 0 \\ L_\lambda = -g(\underline{x}) = -(x_1 + x_2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to f(\underline{x}^0) = 1$ è punto di massimo relativo, si vede esaminando le curve di livello. Si osservi che, poiché $\lambda = 1$, $\nabla f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \nabla g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$



Esempio 34.6

min $f(\underline{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 - 1$ soggetta al vincolo $g(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 16 = 0$.

Tutti i punti ammissibili sono regolari; infatti $\nabla g(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$

$\underline{0} \notin C_0 = \{\underline{x} \in R^2 : x_1^{\,2} + x_2^{\,2} - 16 = 0\}$

$L(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 - 1 - \lambda(x_1^{\,2} + x_2^{\,2} - 16)$

Per trovare i punti candidati ad essere soluzione del problema si risolve il sistema

$$\begin{cases} L_{x_1} = f_{x_1}(\underline{x}) - \lambda g_{x_1}(\underline{x}) = 2(x_1 - 3) - 2\lambda x_1 = 0 \\ L_{x_2} = f_{x_2}(\underline{x}) - \lambda g_{x_2}(\underline{x}) = 2(x_2 - 3) - 2\lambda x_2 = 0 \\ L_\lambda = -g(\underline{x}) = -(x_1^{\,2} + x_2^{\,2} - 16) = 0 \end{cases}$$

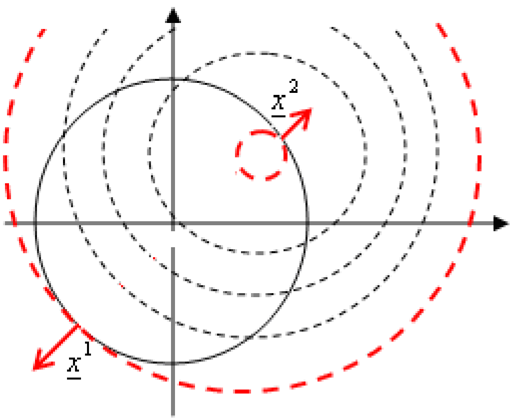
Risolvendo la prima equazione rispetto a λ si ricava $(1-\lambda)x_1 = 3$ da cui

$$\lambda \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{1-\lambda} \\ x_2 = \dfrac{3}{1-\lambda} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Sostituendo λ si ottengono due punti che, poiché l'insieme C_0 è chiuso e limitato, sono sicuramente uno di massimo e uno di minimo.

$\lambda = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{2} > 0 \ \underline{x}^1 = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \to f(\underline{x}^1) \cong 66.94$ è punto di massimo.

$\lambda = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{2} < 0 \ \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \to f(\underline{x}^2) \cong -0.94$ è punto di minimo



Applicazione 34.1 (continua)

Applicando il teorema 34.1 all'esempio si ottiene lo stesso risultato; infatti $u(x, y)$ è la funzione di utilità di un consumatore con il vincolo di bilancio $L(x, y) = u(x, y) - \lambda(xp_x + yp_y - K)$

Per trovare i punti candidati ad essere soluzione del problema si risolve il sistema

$$\begin{cases} L_x = u_x(\underline{x}) - \lambda p_x(\underline{x}) = 0 \\ L_y = u_y(\underline{x}) - \lambda p_y(\underline{x}) = 0 \\ L_\lambda = xp_x + yp_y - K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x(\underline{x}) = \lambda p_x(\underline{x}) \\ u_y(\underline{x}) - \lambda p_y(\underline{x}) = 0 \\ xp_x + yp_y - K = 0 \end{cases}$$

Da cui si ottiene che nel punto di equilibrio (x_0, y_0) il gradiente della funzione di utilità e il vettore dei prezzi sono paralleli:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \text{ ovvero si ha } \frac{u_x}{u_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

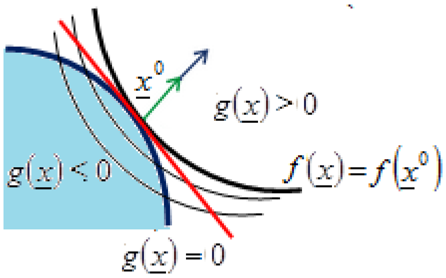
Osservazioni importanti

1. Se il vincolo è di uguaglianza, il segno di λ è indifferente; infatti la C.N. è il parallelismo dei gradienti delle funzioni f e g nel punto di ottimo.

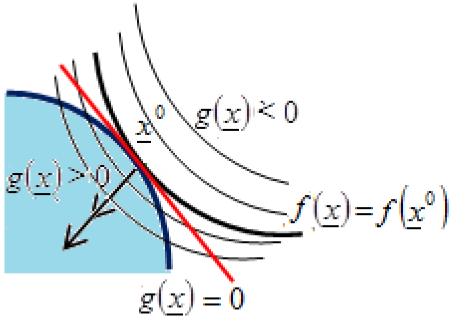
2. Se il vincolo è di disuguaglianza, il segno di λ è rilevante; infatti la C.N. si possono considerare due situazioni standard:

   $f, g : A \to R$, $A \subseteq R^2$ aperto, $f, g \in C^1(A)$

   Se $\underline{x}^0$ è punto di massimo di $f(\underline{x})$ ristretta a $C_0 = \{\underline{x} \in R^2 : g(\underline{x}) \leq 0\}$ allora $\nabla f(\underline{x}_0)$ e $\nabla g(\underline{x}_0)$ sono paralleli e rivolti entrambi "**verso l'esterno**" della regione ammissibile C_0:



   Se $\underline{x}^0$ è punto di minimo di $f(\underline{x})$ ristretta a $C_0 = \{\underline{x} \in R^2 : g(\underline{x}) \geq 0\}$ allora $\nabla f(\underline{x}_0)$ e $\nabla g(\underline{x}_0)$ sono paralleli e rivolti entrambi "**verso l'interno"** della regione ammissibile C_0:



   In entrambi i casi risulterà:

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \lambda_0 \nabla g f(\underline{x}_0) \text{con } \lambda_0 > 0$$

3. Una volta individuati i punti che verificano la C.N. per stabilire la natura di tali punti esistono condizioni sufficienti che riguardano l'hessiano della funzione obiettivo *f* e il gradiente della funzione *g*. Tuttavia è possibile anche utilizzare l'andamento delle curve di livello come visto negli esempi.