

H.E. LEZ. ~~11^a~~ ^{10^a} HA 4/11 ~~11/11~~ ~~12/11~~ ~~13/11~~

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 1° ORDINE (PARTE III : EQ. DIFF. ORDINARIE)

VOL. 7 H.H.H.H.

↙ E.D.O.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

DOVE $p(x)$ E $q(x)$ SONO FUNZ. CONT.

y E y' SONO LE 2 INCOGNITE

$$y = f(x) = ? \quad \text{E} \quad y' = f'(x) = ?$$

LINEARI : y E y' SONO DI GRADO 1°

E.D.A. $y' + p(x)y = 0 \quad (q(x)=0)$

↑ E.D. OMOGENEA

⇒ HA SEMPRE UNA SOLUZ.

$$y = f(x) = 0 \quad y' = 0$$

$$0 + p(x) \cdot 0 = 0$$

①

ORA CERCO UN'ALTRA SOLUZ. CHE
NON SIA BANALE

$$y' + p(x)y = 0$$

È UN'EQ. DIFF. LINEARE A VARIABILI
SEPARABILI:

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

← USO QUESTA
NOTAZIONE

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

SCAMBIO

$$\frac{1}{y} dy = -p(x) dx$$

INTEGRO 1 2
MEMBRI

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx$$

$$\log|y| = -\int p(x) dx$$

$$\Rightarrow y = c \cdot e^{-\int p(x) dx} \quad c \in \mathbb{R}$$

↑ È DETTA SOLUZ.
PARTICOLARE

(2)

ES. $y' + 2xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{1}{y} dy = -2x dx \quad \text{INTEGRO}$$

$$\log|y| = -2 \frac{x^2}{2} + K$$

$$y = e^{-x^2 + K} = e^K \cdot e^{-x^2} = c \cdot e^{-x^2}$$

$c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' + p(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{PROBL.} \\ \text{DI} \\ \text{CAUCHY} \end{array}$$

CONDIZIONE INIZIALE

SOLUZ. E'

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}$$

ES. $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ PL. DI CAUCHY $-\int_0^x 2x dx =$

$\Rightarrow$ SOLUZ. $y(x) = 1 \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}$

VERIFICA:

$$y'(x) = e^{-x^2} (-2x)$$

$\uparrow$ è $y(x)$

$$y' = -2xy \quad \text{e} \quad y(0) = e^0 = 1 \quad \checkmark$$

CASO GENERALE CON $q(x) \neq 0$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

SOLUZ. $\rightarrow$

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + C \right)$$

ES. $\begin{cases} y' + 2xy = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ PROBL. DI CAUCHY

RISOLVIAMO PRIMA EQ. OMOG. ASS.

$$y' + 2xy = 0$$

COME PRIMA TROVIAMO

$$y(x) = c e^{-x^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

POI CERCO UNA SOLUZ. PARTIC. $\bar{y}$ |

$$\bar{y}' + 2x\bar{y} = x$$

$$\bar{y}' = -2x\bar{y} + x$$

$$\bar{y}' = x(-2\bar{y} + 1) \quad \text{A VAR. SEPAR.}$$

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = x(-2\bar{y} + 1)$$


$$\frac{1}{-2\bar{y} + 1} d\bar{y} = x dx \quad \text{INTEGRO}$$

$$\int \frac{1}{-2\bar{y} + 1} d\bar{y} = \int x dx$$

$$\frac{\log(-2\bar{y} + 1)}{-2} = \frac{x^2}{2} + K$$

$$\log(-2\bar{y}+1) = -x^2 + K$$

$$-2\bar{y}+1 = e^{-x^2} \cdot c$$

$\Rightarrow$ SOMMO LE 2 SOL. DELL'OMOGENEA E LA PARTICOLARE

$$y^*(x) = c e^{-x^2} + \cancel{c}$$

IMPONGO LA COND. INIZ. $y(0)=1$

$$\Rightarrow c \cdot e^0 + c = 1$$

$$2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

(No)

LA SOLUZ. $\bar{y} = ax + b$
 $\bar{y}' = a$

$$a + 2x(ax + b) = x$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ (altrimenti, ho un pol. di 2° grado)}$$

$$0 + 2x(b) = x$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow y^*(x) = c e^{-x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{ORA } y(0)=1 \Rightarrow c + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \text{ (6)}$$

$$y^*(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} \quad \text{SOLUZ. DEL PB DI CAUCHY}$$

TEO L'INTEGRALE GENERALE DI UN'E.D.O. DEL 1° ORDINE LINEARE È

$$y(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOL. DELLA} \\ \text{OMOGENEA}}}{y_{\text{oh}}(x)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PARTICOL.}}}{\bar{y}(x)}$$

(EQ. DIFF. DI BERNOULLI)

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

1) PER $\alpha = 0$ $y' + p(x)y = q(x)$ $\alpha \in \mathbb{R}$
 $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$

2) PER $\alpha = 1$ $y' + p(x)y = q(x)y$ $\Rightarrow$ OMOGENEA
 quella di prima

SE $y \in$ UNA SOLUZ. $\neq 0 \Rightarrow$

$$y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x)$$

POSTO $z = y^{1-\alpha}$ SI HA $z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$

$$\Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$$

E.D.O. LINEARE IN $z = ?$

ES. $y' = y - \frac{1}{y}$ È DI BERNOLLI

$$y' - y = -y^{-1}$$

$$\alpha = -1$$

$$p(x) = -1$$

$$q(x) = -1$$

POSTO $z = y^{1-(-1)} = y^2$ SI HA

$$z' = 2yy'$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{2y} - y = -\frac{1}{y}$$

DENOM. COMUNE

$$\frac{z' - 2y^2}{2y} = \frac{-2}{2y}$$

$$z' - 2z = -2$$

EQ. DIF. ORD. LINEARE

OMOG. ASS. $z' - 2z = 0$

$$\frac{dz}{dx} = 2z$$

$$\frac{1}{z} dz = 2 dx$$

⑧

$$\log z = 2x + K$$

$$z_{\text{om.}} = e^{2x} \cdot C$$

$$\text{SOLUZ. PART. } \bar{z} = h \quad \bar{z}' = 0$$

$$0 - 2h = -2 \Rightarrow h = 1 \text{ cost.}$$

$$\Rightarrow z^* = z_{\text{om.}} + \bar{z}$$

$$z^* = C e^{2x} + 1 \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y^* = \pm \sqrt{1 + C e^{2x}} \quad C \in \mathbb{R} \#$$

EQ. DIFF. DI RICCATI

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

DOVE p, q, r SONO FUNZ. CONT.

SE CONOSCO UNA SOLUZ. $y_1(x)$

$\Rightarrow$ PONGO $y = y_1(x) + z$ NELL'EQ.

$$\Rightarrow y_1' + z' + p(x)y_1 + p(x)z + q(x)(y_1 + z)^2 = r(x)$$

VEDI CHE $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 = r(x)$

(9)

$$y_1' + z' + p(x)y_1 + p(x)z + q(x)[y_1^2 + 2y_1z + z^2] = r(x)$$

$$z' + p(x)z + q(x)[2y_1z + z^2] + \cancel{r(x)} = \cancel{r(x)}$$

$$\Rightarrow z' + z[p(x) + 2q(x)y_1] = -q(x)z^2 \quad \text{EQ. DI BERN. IN } z$$

ES. $y' + y + y^2 = x + 1$ EQ. DI RICCATI

CON $p(x)=1$ $q(x)=1$ $r(x)=x+1$

SO CHE $y_1(x) = x$ LA RISOLVE

$y_1' = 1$; $1 + x + x^2 = x + 1$

(No)

$y_1 = ax + b$

$y_1' = a$

(No)

$$\Rightarrow a + ax + b + (ax + b)^2 = x + 1$$

$$a + ax + b + \underline{a^2x^2 + 2abx + b^2} = x + 1$$

$$\begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab + a = 1 \\ a + b^2 + b = 1 \end{cases}$$

$b(b+1) = 1$ $b^2 + b - 1 = 0$
 $b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$ (10)

A.I.

Step 1: Trovare una soluzione particolare

L'equazione differenziale data è . Per risolverla, è necessario trovare una soluzione particolare. Si può notare che la funzione soddisfa l'equazione. Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$y' = 1$$

$$y = x$$

$$1 + x + x^2 = x + 1 \\ \Rightarrow x^2 = 0$$

Questo non è vero. La soluzione non è una soluzione particolare.

$$y = c \quad y' = 0$$

Proviamo con . Allora . L'equazione diventa , che non è possibile per tutti i valori di x

$$0 + c + c^2 = x + 1$$

Proviamo con . Allora . Sostituendo:

$$y = ax + b \Rightarrow a = 0 \text{ IMPOSS.}$$

Per confrontare i coefficienti:

, falso.

C'è un errore nella ricerca della soluzione particolare. Riprovo a indovinarla.

L'equazione è . Potrebbe esserci una soluzione semplice.

Se , allora . Sostituendo:

$$y' = (x+1) - y - y^2$$

$$y = x - 1 \Rightarrow y' = 1$$

$$1 + x - 1 + (x - 1)^2 = x + 1 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

. Vero solo per e . Non per ogni x

Torniamo all'idea iniziale che .

Se , Sostituendo: . Questo è vero se , quindi solo per .

Non una soluzione particolare.

In mancanza di una soluzione particolare, l'equazione non può essere risolta con il metodo standard di riduzione.

Per risolvere l'equazione differenziale di Riccati, è necessario trovare una soluzione particolare.

Una soluzione particolare è .

Sostituendo nell'equazione:

$$y = -1 \quad y' + y + y^2 = x + 1$$

$$y' = 0 \quad 0 = x + 1$$

Questo non è vero per ogni x .

Una soluzione particolare corretta è . Sostituendo:

. Questo non è vero.

$$y = \tan(x)$$

In mancanza di una soluzione particolare, l'equazione non può essere risolta con il metodo standard di riduzione.

Per risolvere l'equazione differenziale di Riccati, è necessario trovare una soluzione particolare.

Una soluzione particolare è .

Sostituendo nell'equazione:

Questo non è vero per ogni x .

Una soluzione particolare corretta è . Sostituendo:

. Questo non è vero.

Sembra che l'equazione data non abbia una soluzione particolare semplice, e senza di essa non può essere risolta con i metodi standard.

Sembra che l'equazione data non abbia una soluzione particolare semplice, e senza di essa non può essere risolta con i metodi standard.

Risposta

Per risolvere un'equazione di Riccati, è necessario conoscere una soluzione particolare. L'equazione data è . Non è facile trovare una soluzione particolare per questa equazione, e i metodi standard di risoluzione per le equazioni di Riccati non possono essere applicati senza tale soluzione.

Le risposte dell'AI potrebbero contenere errori. [Scopri di più](#)



Risposta

Per risolvere un'equazione di Riccati, è necessario conoscere una soluzione particolare.

L'equazione data è . Non è facile trovare una soluzione particolare per questa equazione, e i metodi standard di risoluzione per le equazioni di Riccati non possono essere applicati senza tale soluzione.

EQ. DIFF. DI RICCATI

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

- 1) SE $p(x)=0$ E $r(x) \neq 0$ ↑ NON È LINEARE
BERNOULLI
- 2) SE $r(x)=0$ E $p(x) \neq 0$ LIN. 1° ORD.
NON OMOG.
(HA ANCHE $q(x) \neq 0$)

ES. $y' = x^4 + y^2$

$p(x) = x^4$ $q(x) = 0$ $r(x) = 1$

$$y' - y^2 = x^4$$

CHE SOLUZ. PART. HA? BOH...

METODO DI SOSTITUZIONE

$$y = - \frac{u'(x)}{r(x) \cdot u(x)}$$

u NUOVA
FUNZ. INC.

$$y = - \frac{u'}{u}$$

$$y' = - \frac{\frac{u'' \cdot u - (u')^2}{u^2}}{u^2} = - \frac{u''}{u} + \frac{(u')^2}{u^2}$$

(11)

SOSTITUISCO NEL TESTO

$$-\frac{u''}{u} + \frac{(u')^2}{u^2} = x^4 + \left(-\frac{u'}{u}\right)^2$$

$$\Rightarrow -\frac{u''}{u} + \frac{(u')^2}{u^2} = x^4 + \frac{(u')^2}{u^2}$$

$$\Rightarrow -u'' = x^4 \cdot u$$

$$u'' + x^4 u = 0$$

EQ. DIFF.
OMOG. DEL
2° ORDINE

ES: ⑦ pag 42

E.D.O. LINEARI

$$1) y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad x \neq 0$$

$$2) y' - \frac{y}{x} = x^2 \quad x \neq 0$$

$$3) y' + \frac{y}{x} = e^{x(2+\frac{1}{x})} \quad x \neq 0$$

$$4) (x-1) dy + y dx = (x-2)^2 dx$$

ES. (11) pag 42 PROBL. DI CAUCHY

$$1) \begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \log(x) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^x \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

N.B. FAREMO IL CASO DI
E.D.O. LINEARI DEL 1° ORD.
A COEFF. COST.

N.B. FAREMO IL CASO DI E.D.
A VARIAB. SEPARABILI

ES. (7)

$$2) \quad y' - \frac{y}{x} = x^2$$

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

E.D.O. A.V.S.

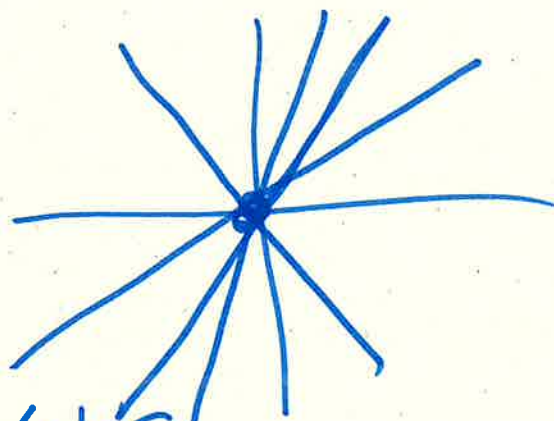
$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$|y| = |x| \cdot K$$

$K \in \mathbb{R}$

$$y_{\text{on}} = K \cdot x$$



$$y' = 2x^2 + bx + c$$

$$y' = 2x + b$$

$$2ax + b - \frac{ax^2 + bx + c}{x} = x^2$$

$$2ax + \cancel{b} - ax - \cancel{b} - \frac{c}{x} = x^2$$

$$\bar{y} = 2x^3 + bx^2 + cx$$

$$\frac{d}{dx} \bar{y} = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\underline{\underline{3ax^2 + 2bx + c - \frac{ax^3 + bx^2 + cx}{x} = x^2}}$$

$$\begin{cases} 3a - a = 1 \\ 2b - b = 0 \\ c - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \\ b &= 0 \\ \forall c \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}x^3 + 5x$$

$$y^*(x) = K \cdot x + \frac{1}{2}x^3 + 5x$$

$$3) \begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^x \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C$$

$$|y| = |x|^{-1} \cdot K \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y_{\text{hom.}} = \frac{1}{x} \cdot K$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= h \cdot x e^x \\ y' &= h(e^x + x e^x) \end{aligned}$$

$$h(e^x + x e^x) + \frac{h x e^x}{x} = e^x$$

$$h(1+x) + h = 1$$

$$hx + h + h = 1$$

$$hx + 2h = 1$$

$$\begin{cases} h = 0 \\ 2h = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 0 \\ h = \frac{1}{2} \end{cases}$$

No!

$$y' = (ax+b)e^x$$

$$y' = a \cdot e^x + (ax+b)e^x$$

$$a e^x + (ax+b)e^x + \frac{(ax+b)e^x}{x}$$

No!

$$\begin{aligned}\bar{y} &= (ax^2 + bx)e^x \\ \bar{y}' &= (2xa + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x \\ &+ (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x + \\ &+ (ax + b)e^x = e^x \\ \cancel{2ax + b} + \underline{2x^2} + \cancel{bx} + \cancel{ax + b} &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ \text{imposs.} \end{cases}$$

No!

FORSE

$$\bar{y} = \frac{k}{x} e^{ax+b}$$

FORSE

$$\bar{y} = e^{ax+b}$$

"

$$\bar{y} = x e^{ax+b}$$