

Metodo di Newton-Raphson

$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$

Supponiamo di avere calcolato il valore x_k .

La migliore approssimazione lineare della funzione f nel punto x_k è data dalla retta tangente

$$t_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Ponendo $t_k(x) = 0$, si ricava il nuovo punto della successione x_{k+1} .

Iterata di Newton-Raphson

Dato x_0 ,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

M. E. LEZ. 6^a
21/10/2025

Il metodo di Newton-Raphson per sistemi

Consideriamo una funzione a valori vettoriali $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Problema

Trovare $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ tale che $F(\mathbf{x}) = 0$.

Iterazione del metodo di Newton-Raphson

La nuova approssimazione si ottiene come

$$x_{k+1} = x_k + \delta_x \quad y_{k+1} = y_k + \delta_y$$

dove il vettore $\delta = (\delta_x, \delta_y)^T$ è la soluzione del sistema

$$J(x_k, y_k)\delta = -F(x_k, y_k)$$

e

$$J(x_k, y_k) = \begin{pmatrix} f_x(x_k, y_k) & f_y(x_k, y_k) \\ g_x(x_k, y_k) & g_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

$$F(x_k, y_k) = \begin{pmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

Linearizzazione

Per semplicità consideriamo $n = 2$ quindi abbiamo il sistema:

$$F = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad 2 \times 2$$
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo di essere arrivati a calcolare un'approssimazione (x_k, y_k) e consideriamo l'approssimazione di f e g con i piani tangenti nel punto (x_k, y_k) :

$$\begin{cases} f(x, y) \approx f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f_y(x_k, y_k)(y - y_k) \\ g(x, y) \approx g(x_k, y_k) + g_x(x_k, y_k)(x - x_k) + g_y(x_k, y_k)(y - y_k) \end{cases}$$

Esercizi

Esercizio 9

Applicare il metodo di Newton-Raphson per trovare gli zeri delle seguenti funzioni:

① $F_1(x, y) = \begin{pmatrix} x + y - 3 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix}$

radici: $(0, 3)$ $(3, 0)$
 $x_0 = (1, 5), x_0 = (2, 3)$

② $F_2(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ e^{x-1} + y^3 - 2 \end{pmatrix}$

radice: $(1, 1)$
 $x_0 = (1.5, 2), x_0 = (2, 3)$

Trovare la soluzione usando il metodo di Newton (`newtonsys`) e la function di Matlab `fsolve`. In questo caso confrontare cosa si ottiene fornendo anche il valore dello Jacobiano.

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases}$$

$$x_0=2$$

$$y_0=3$$

$$f(2,3)=2$$

$$g(2,3)=4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=2x \rightarrow 4$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=y \rightarrow 3$$

$$\begin{cases} 2 + 1(x-2) + 1 \cdot (y-3) = 0 \\ 4 + 4(x-2) + 6(y-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1(x-2) + 1(y-3) = -2 \\ 4(x-2) + 6(y-3) = -4 \end{cases}$$

①

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix}$$

$$\det J = 6 - 4 = 2$$

$$J^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \delta$$

②

$$\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+2 \\ 4-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \delta = \begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix}$$

$$x - x_0 = -4 \longrightarrow$$

$$y - y_0 = 2 \longrightarrow$$

$$x_1 = -2$$

$$y_1 = 5$$

...

$$x_m \approx$$

$$y_m \approx$$

③

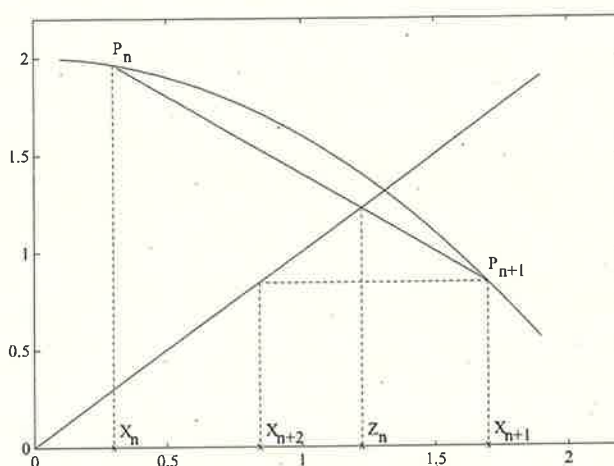


Figura 4.6: Processo di Aitken.

Teorema 4.4.4 Sia $\phi(x)$ la funzione di iterazione di un metodo di ordine p per approssimare un suo punto fisso α . Per $p > 1$ il corrispondente metodo di Steffensen (4.20) per approssimare α ha ordine $2p - 1$, mentre per $p = 1$ e nella ipotesi $\phi'(\alpha) \neq 1$, il metodo (4.20) ha ordine almeno 2.

4.5 Metodo di Newton

Il più importante fra i metodi ad un punto è il *metodo di Newton*. Tale metodo si può applicare per approssimare uno zero α di $f(x)$ se, in tutto un intorno di α , $f(x)$ è derivabile con continuità. In tal caso, assumendo la funzione di iterazione della forma

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (4.21)$$

si ha il metodo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

L'iterata x_{n+1} è individuata dal punto d'incontro dell'asse delle ascisse con la tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $A_n \equiv [x_n, f(x_n)]$ (cfr. Fig. 4.7); per questo si usa anche la denominazione di *metodo delle tangenti*.

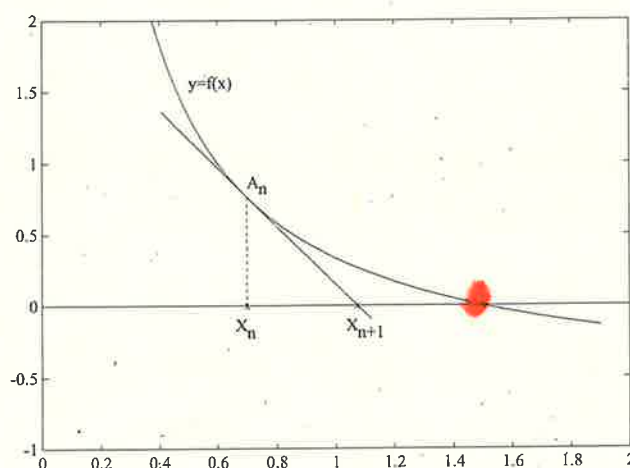


Figura 4.7: Metodo di Newton.

Sulla convergenza e l'ordine del metodo di Newton, vale il seguente teorema.

Teorema 4.5.1 Sia $f(x) \in C^3([a, b])$, $a < \alpha < b$, $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, allora valgono le proposizioni:

1. esiste un numero $\rho > 0$ tale che per ogni $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ il metodo (4.22) converge;
2. la convergenza è di ordine $p \geq 2$;
3. se $p = 2$ il fattore di convergenza è $C = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right|$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (4.21) segue

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \quad (4.23)$$

da cui

$$\phi'(\alpha) = 0; \quad (4.24)$$

quindi, fissato un numero positivo $K < 1$, esiste un numero $\rho > 0$ tale che per ogni $x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ si abbia $|\phi'(x)| \leq K$ e perciò vale il teorema di convergenza 4.4.1.

$f'(x_n)$ non si calcola ad ogni passo ma solo ogni volta che n coincide con un elemento di un prefissato sottoinsieme dei numeri naturali, lasciando $f'(x_n)$ uguale all'ultimo valore calcolato se n non appartiene a tale sottoinsieme. Si noti che se il valore di $f'(x_n)$ viene mantenuto costante per ogni n , la convergenza del metodo dipende dal valore di tale costante ed è comunque lineare. Anche il metodo delle secanti può considerarsi ottenuto dal metodo di Newton approssimando $f'(x_n)$ con il rapporto incrementale $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.

4.6 Metodi iterativi in $\mathbb{R}^n$

La teoria dei metodi iterativi precedentemente esposta può essere estesa al caso in cui, nella (4.1), sia $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, cioè al caso di un sistema di n equazioni (non lineari) in altrettante incognite

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

In analogia con quanto esposto in 4.4, il sistema (4.29) si può scrivere in una forma equivalente la quale consente di approssimare una soluzione $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ come punto fisso di una opportuna funzione di iterazione $\phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da

$$\phi(x) = x - G(x)f(x), \quad (4.30)$$

dove $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ e $G(x)$ è una matrice $n \times n$ non singolare in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ contenente α .

Si considerano quindi metodi iterativi della forma

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.31)$$

per i quali si definisce l'ordine di convergenza come in 4.1 cambiando nella Definizione 4.1.1 i valori assoluti in norme di vettori.

Se esistono continue le derivate prime delle funzioni ϕ_i , introducendo la matrice jacobiana

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

si può generalizzare il Teorema 4.4.1 e dimostrare il seguente teorema di convergenza locale.

Teorema 4.6.1 *Se α è un punto fisso di $\phi(x)$, condizione sufficiente per la convergenza ad α del metodo (4.31) è che esistano due numeri positivi K e ρ , con $K < 1$, tali che si abbia*

$$\|\Phi(x)\| \leq K, \quad \forall x \in D_\rho = \{x \mid \|x - \alpha\| \leq \rho\}; \quad (4.33)$$

purché $x^{(0)}$ sia scelto in D_ρ ; in tal caso α è l'unico punto fisso di ϕ in D_ρ .

Il Teorema 4.4.2 non può essere direttamente esteso in $\mathbb{R}^n$; tuttavia se esistono continue le derivate seconde delle ϕ_i , si può dimostrare che, se il metodo (4.31) converge ad un punto fisso α , condizione sufficiente perché converga linearmente è che sia

$$\Phi(\alpha) \neq \mathbf{O}.$$

Mentre, se $\Phi(\alpha) = \mathbf{O}$, la convergenza è almeno quadratica ed è esattamente quadratica se risulta non nulla almeno una delle matrici hessiane

$$H_i(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{x=\alpha}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per estendere il metodo di Newton al sistema non lineare (4.29), supponiamo che le funzioni f_i siano derivabili con continuità rispetto a ciascuna variabile e che la matrice jacobiana

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

sia non singolare in un dominio contenente nel suo interno una soluzione α del sistema (4.29).

Specializzando la funzione di iterazione (4.30) nella forma

$$\phi(x) = x - J^{-1}(x)f(x),$$

si ha il sistema $x = x - J^{-1}(x)f(x)$ equivalente a (4.29), da cui il metodo iterativo di Newton o di *Newton-Raphson*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}(x^{(k)})f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Nell'uso pratico del metodo l'iterata $x^{(k+1)}$ si ricava dalla soluzione del sistema lineare

$$J(x^{(k)})d^{(k)} = -f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.34)$$

dove $d^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$.

Sull'ordine e sulla convergenza locale del metodo si ha il seguente teorema.

Teorema 4.6.2 *Sia $\alpha \in D$ soluzione di (4.29) e le funzioni f_i siano della classe $C^3(D)$ e tali che $J(x)$ sia non singolare in D ; allora l'ordine di convergenza del metodo di Newton è almeno $p = 2$ e si ha convergenza per ogni scelta di $x^{(0)}$ in un opportuno dominio contenente α .*

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto della forma della funzione di iterazione ϕ , la colonna j -esima della matrice (4.32) risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} &= \frac{\partial x}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1}(x)f(x)] \\ &= \frac{\partial x}{\partial x_j} - J^{-1}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial J^{-1}(x)}{\partial x_j} f(x) \\ &= - \frac{\partial J^{-1}(x)}{\partial x_j} f(x); \end{aligned}$$

infatti i vettori $\frac{\partial x}{\partial x_j}$ e $J^{-1}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ coincidono con la j -esima colonna della matrice identica. Ne segue che per $x = \alpha$ si ha

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_{x=\alpha} = - \left(\frac{\partial J^{-1}(x)}{\partial x_j} \right)_{x=\alpha} f(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

quindi è

$$\Phi(\alpha) = \mathbf{O}, \quad (4.35)$$

cioè l'ordine di convergenza del metodo è almeno $p = 2$.

Dalla continuità di $\Phi(x)$ e dalla (4.35) segue infine, per un assegnato $K < 1$, l'esistenza di un dominio $D_\rho = \{x \mid \|x - \alpha\| \leq \rho\} \subset D$ in cui vale la condizione (4.33) e quindi il metodo converge $\forall x^{(0)} \in D_\rho$. $\square$

Esempio

Determinare i punti di intersezione tra il cerchio $x^2 + y^2 = 3$ e l'iperbole $xy = 1$ con 3 decimali esatti.

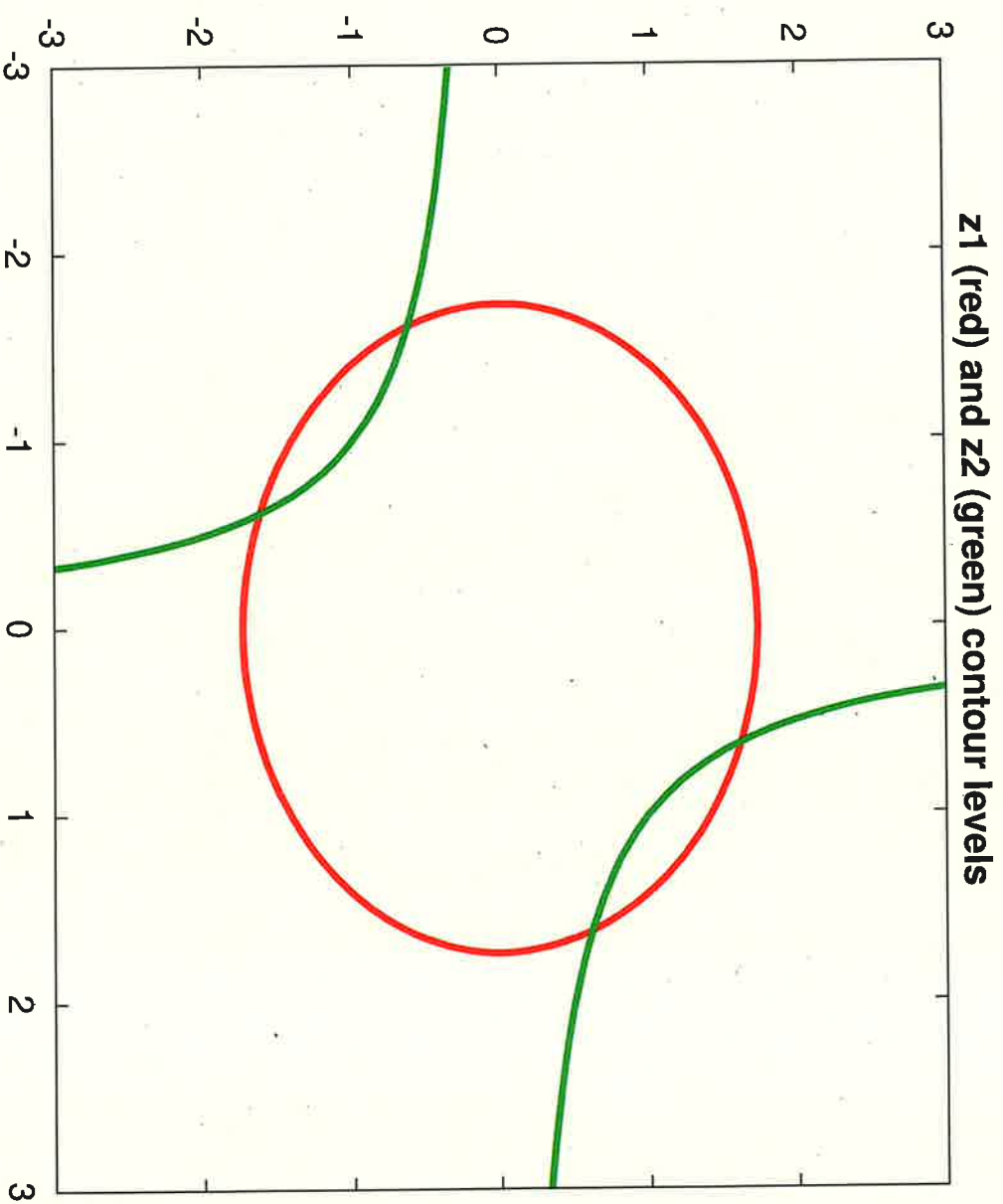
Soluzione

Si devono trovare i punti che annullano simultaneamente le funzioni $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ e $g(x, y) = xy - 1$.

Si tratta quindi di risolvere il **sistema non lineare**

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ g(x, y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Separazione grafica:



Le due funzioni hanno 4 punti di intersezione: 2 nel primo quadrante e 2 nel terzo.

Ne segue che, detti $\xi_1 = (x_1, y_1)$ e $\xi_2 = (x_2, y_2)$ i punti di intersezione nel primo quadrante, i rimanenti due sono:

$$\xi_3 = (-x_1, -y_1) \quad \text{e} \quad \xi_4 = (-x_2, -y_2).$$

Inoltre, se il punto di coordinate (x_1, y_1) è uno zero sia di f che di g , lo è anche il punto di coordinate (y_1, x_1) . Ne segue che

$$\xi_2 = (x_2, y_2) = (y_1, x_1).$$

Il punto $\xi_1 = (x_1, y_1)$ è contenuto in $I_1 = [0, 1] \times [1, \sqrt{3}]$.

Si verifica facilmente che $F(x, y) = [f(x, y), g(x, y)]^T \in C^2(I_1)$.

Inoltre

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

e quindi

$$|J_F(x, y)| = 2x^2 - 2y^2 = 0 \iff x^2 = y^2 \iff y = \pm x$$

2 bisettrici

$$\Rightarrow |J_F(x, y)| \neq 0 \text{ in } I_1.$$

Sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**

Scegliendo il punto $X^{(0)} = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ come approssimazione iniziale della soluzione si ha

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \frac{1}{|J_F(x_0, y_0)|} [f(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) f_y(x_0, y_0)] \\ y_1 = y_0 - \frac{1}{|J_F(x_0, y_0)|} [g(x_0, y_0) f_x(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0)] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} - 3 \right) \frac{1}{2} - \left(\frac{13}{22} - 1 \right) 2 \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \\ y_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{4} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \end{cases}$$

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = \max \left\{ \left| \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \right|, \left| \frac{13}{8} - \frac{3}{2} \right| \right\} = 0.125 > 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\nearrow \frac{1}{8}$$

$$\nearrow \frac{1}{8}$$

$$\nearrow \frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 0.00694 = 0.61806 \\ y_2 = y_1 - 0.00694 = 1.61806 \end{cases}$$

$$\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_{\infty} = \max\{|0.61806 - 0.625|, |1.61806 - 1.625|\} = 0.00694 > 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - 0.00003 = 0.61803 \\ y_3 = y_2 - 0.00003 = 1.61803 \end{cases}$$

$$\|X^{(3)} - X^{(2)}\|_{\infty} = \max\{|0.61803 - 0.61806|, |1.61803 - 1.61806|\} = 0.00003 < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

Esercizio

Dato il sistema non lineare

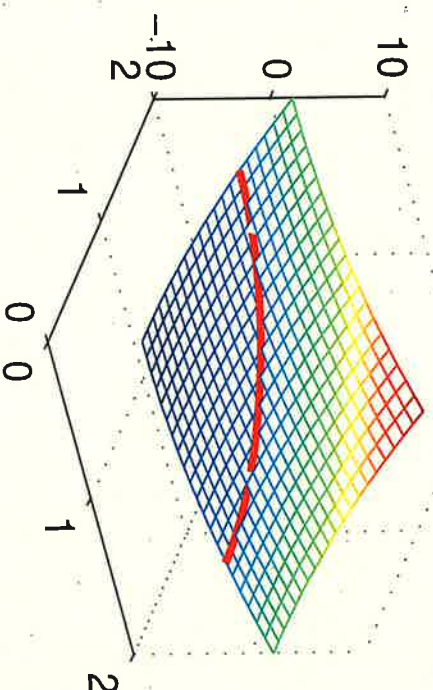
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0, \end{cases}$$

stabilire se il metodo di Newton è adatto ad approssimare la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

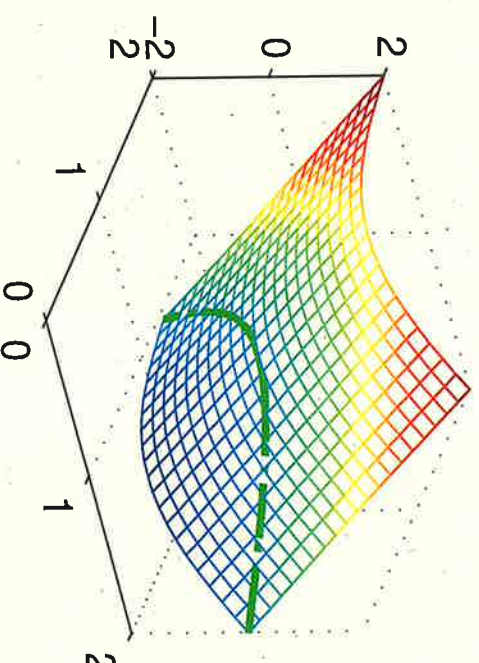
Soluzione

E' necessario determinare un opportuno intervallo I in cui la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ del sistema sia unica. Disegnando il grafico delle due funzioni, limitandoci al primo quadrante, possiamo concludere che $I = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}]$ è un buon intervallo di separazione

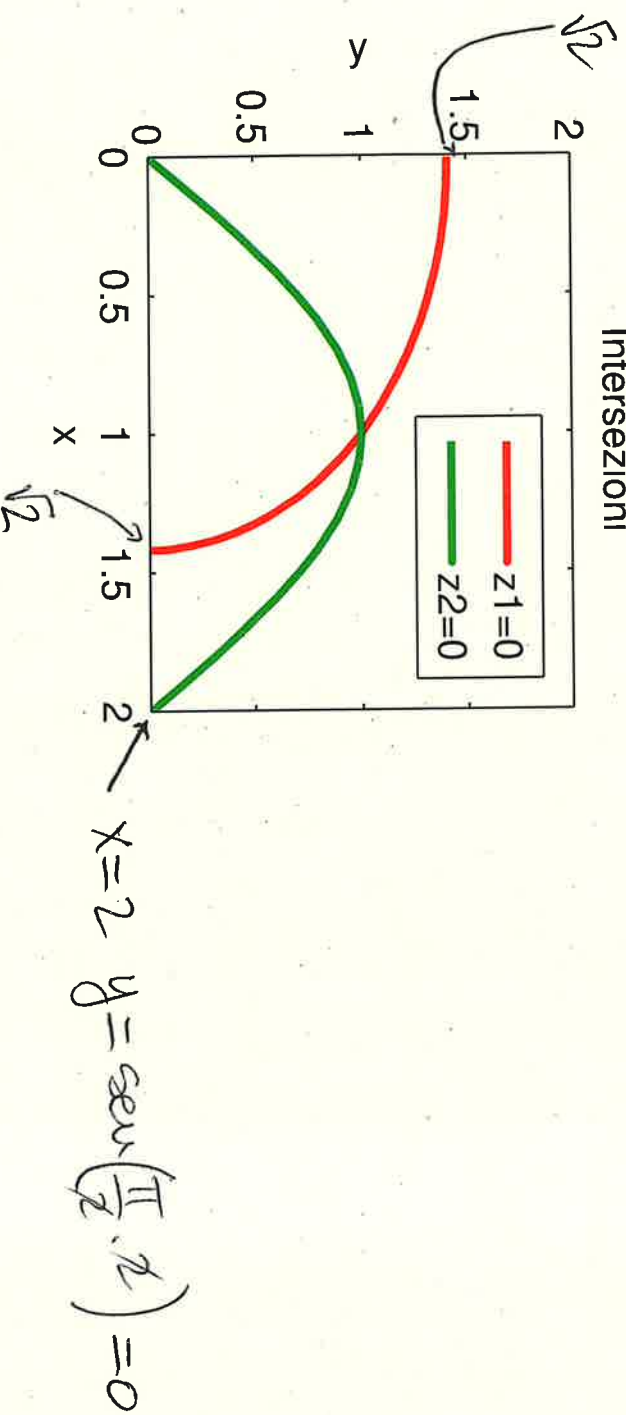
$z_1=f(x,y)$



$z_2=g(x,y)$



Intersezioni



Inoltre, le funzioni $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ e $g(x,y) = y - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ sono

$C^2(I)$, mentre la matrice Jacobiana

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 1 \end{bmatrix}$$

è tale che

$$|J_F(x, y)| = 2x + \pi y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0$$

in un intorno opportuno del punto $(1, 1)$ contenuto in I ; infatti,

$$|J_F(1, 1)| = 2 + 0 > 0.$$

Possiamo concludere che sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**.

ES.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 - 10 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 + 3x_1 x_2^2 - 57 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{x}_0 = [1,5 \quad 3,5]^T \quad \text{PUNTO INIZIALE}$$

$$\text{SOLUZ. ESATTA È } [2 \quad 3]^T$$

$$\underline{F}(\underline{x}) = (x_1^2 + x_1 x_2 - 10, x_2 + 3x_1 x_2^2 - 57)$$

MATRICE JACOBIANA

$$\underline{J}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 \\ 3x_2^2 & 1 + 6x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}(\underline{x}_0) = (1,5^2 + 1,5 \cdot 3,5 - 10, 3,5 + 3 \cdot 1,5 \cdot 3,5^2 - 57)$$

$$\simeq (-2,5, 15,46875)$$

$$\underline{J}(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} 6,5 & 1,5 \\ 36,75 & 32,5 \end{bmatrix}$$

Metodo delle tangenti

In matematica, e in particolare in analisi numerica, il **metodo delle tangenti**, chiamato anche **metodo di Newton** o **metodo di Newton-Raphson**, è uno dei metodi per il calcolo approssimato di una soluzione di un'equazione della forma $f(x) = 0$. Esso si applica dopo avere determinato un intervallo $[a, b]$ che contiene una sola radice.

Il metodo consiste nel sostituire alla curva $y = f(x)$ la tangente alla curva stessa, partendo da un qualsiasi punto; per semplicità si può iniziare da uno dei due punti che hanno come ascissa gli estremi dell'intervallo $[a, b]$ e assumere, come valore approssimato della radice, l'ascissa x_t del punto in cui la tangente interseca l'asse delle x internamente all'intervallo $[a, b]$.

Procedendo in modo iterativo si dimostra che la relazione di ricorrenza del metodo è

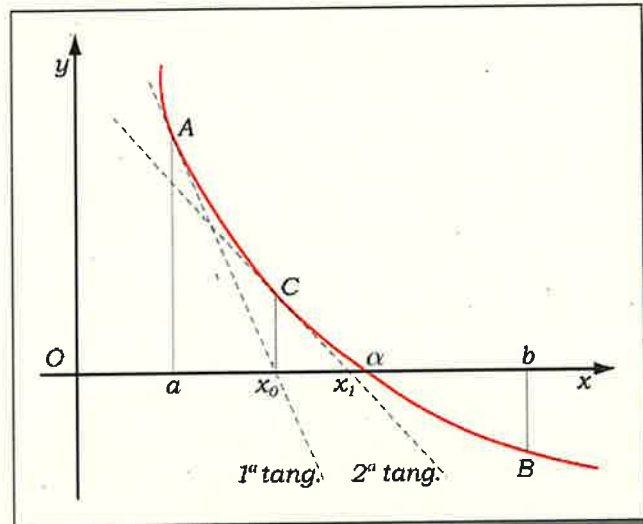
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

che permette di determinare successive approssimazioni della radice dell'equazione $y = f(x) = 0$. Con le ipotesi poste, si dimostra che la successione delle x_n converge alla radice piuttosto rapidamente.

Più in dettaglio, si dimostra che se $f \in C^2(I)$ dove I è un opportuno intorno dello zero α con $f'(\alpha) \neq 0$ e se $x_0 \in I$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)},$$

cioè la convergenza è *quadratica* (il numero di cifre significative approssimativamente raddoppia ad ogni iterazione; mentre col metodo di bisezione cresce linearmente), benché *locale* (cioè non vale per ogni I). Se invece la radice è multipla, cioè $f'(\alpha) = 0$ allora la convergenza è *lineare* (più lenta). Nella pratica, fissata la tolleranza di approssimazione consentita τ , il procedimento iterativo si fa terminare quando $|x_{n+1} - x_n| < \tau \cdot |x_{n+1}|$.



Esempio di applicazione del metodo delle tangenti

Il metodo di Newton (o Newton-Raphson) per sistemi non lineari è un algoritmo iterativo che approssima la soluzione di un sistema di equazioni non lineari usando l'approssimazione lineare locale di ogni equazione. La formula iterativa è $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$, dove $\mathbf{x}_k$ è il vettore delle incognite, $\mathbf{F}$ è il sistema di equazioni, $\mathbf{J}$ è la matrice Jacobiana del sistema e $\mathbf{J}^{-1}$ è l'inversa dello Jacobiano calcolata nel punto $\mathbf{x}_k$. Questo metodo è noto per la sua convergenza quadratica quando l'approssimazione iniziale è sufficientemente vicina alla soluzione.

Come funziona

- **Approssimazione locale:** Ad ogni passo, il metodo approssima le funzioni non lineari con una funzione lineare, ottenuta troncando al primo ordine la loro espansione in serie di Taylor, ottenendo così un sistema lineare.
- **Iterazione:** Si risolve il sistema lineare risultante per trovare il passo successivo, aggiornando la soluzione. La formula chiave per l'aggiornamento è: $x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k)$
- **Calcolo:** Per ogni iterazione, è necessario calcolare il residuo del sistema e la sua matrice jacobiana.
- **Convergenza:** Il metodo si arresta quando la norma del residuo, $\|F(x_k)\|$, scende al di sotto di una soglia prestabilita.
- **Vantaggio:** Il metodo ha una convergenza molto rapida (quadratica), il che significa che il numero di cifre corrette raddoppia ad ogni iterazione, a condizione che l'approssimazione iniziale sia buona.

Esempio di calcolo

1. **Partire da un punto iniziale:** Scegli un vettore iniziale che sia "vicino" alla soluzione che si cerca.
2. **Calcolare il residuo e lo Jacobiano:** A ogni passo , calcolare e la matrice Jacobiana .
3. **Risolvere il sistema lineare:** Risolvere il sistema lineare per trovare il vettore .
4. **Aggiornare la soluzione:** Calcolare il nuovo punto .
5. **Verificare la convergenza:** Controllare se la norma del residuo è inferiore a . Se sì, arrestare il processo; altrimenti, ripetere dal passo 2.

Il metodo di Newton-Raphson per sistemi non lineari è un metodo iterativo per trovare soluzioni approssimate, che generalizza l'idea della retta tangente per funzioni di una variabile. La procedura iterativa prevede il calcolo della soluzione in un sistema di equazioni utilizzando la jacobiana del sistema nella fase di calcolo e applicando la formula iterativa fino a quando il criterio di arresto (basato sulla precisione) non viene soddisfatto. 

Passi fondamentali per risolvere un sistema non lineare con il metodo di Newton-Raphson

1. **Definire il sistema:** Identificare il sistema di equazioni non lineari e scriverlo in forma vettoriale, dove $\mathbf{F}$ è il vettore delle incognite e $\mathbf{x}$ è la funzione vettoriale.
2. **Calcolare la jacobiana:** Calcolare la matrice jacobiana del sistema. Questa è la matrice delle derivate parziali rispetto a ciascuna variabile.

3. **Impostare l'iterazione:** Iniziare con un'approssimazione iniziale $\mathbf{x}_0$. Per ogni passo k :
 - Calcolare il vettore di aggiornamento risolvendo il sistema lineare: 
 - Aggiornare la soluzione: 

1. **Verificare il criterio di arresto:** Si esce dal ciclo quando la norma della differenza tra due iterazioni successive è minore di una tolleranza prestabilita (ad esempio, 10^{-6}) o quando si raggiunge la precisione desiderata per le soluzioni. 

Esercizio di esempio

Problema: Trovare una soluzione del sistema non lineare:

Soluzione:

1. Sistema in forma vettoriale:

dove,

1. Jacobiana:

1. **Iterazione:** Scegliamo un punto iniziale $\mathbf{x}_0$.

• Iterazione 1 ($k=0$):

• Calcolare $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$.

• Risolvere il sistema:

Esercizio 1: Risoluzione di un sistema non lineare

Sistema:

Passo 1: Definire il sistema e la funzione vettoriale

La funzione vettoriale è .

Passo 2: Calcolare la matrice Jacobiana

La matrice Jacobiana è formata dalle derivate parziali:

Passo 3: Applicare la formula iterativa di Newton

La formula iterativa è:

dove .

Passo 4: Eseguire le iterazioni

• **Iterazione 1:** Scegliere un punto iniziale, ad esempio .

◦ Calcolare :

Calcolare $J(\mathbf{x}_{-1})$.

Calcolare $\mathbf{x}_1$.

• **Iterazione 2:** Calcolare utilizzando come punto di partenza. Ripetere il processo fino a quando la differenza tra $\mathbf{x}_k$ e $\mathbf{x}_{k-1}$ è inferiore a una tolleranza prestabilita.

Per risolvere sistemi non lineari con il metodo di Newton, è necessario calcolare le derivate parziali e la Jacobiana, applicare la formula iterativa e ripetere il processo fino a raggiungere la convergenza. Di seguito sono riportati alcuni esercizi svolti che mostrano come applicare il metodo.

Esercizio 1: Risoluzione di un sistema non lineare

Sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ e^x + y = 1 \end{cases}$$

Passo 1: Definire il sistema e la funzione vettoriale

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ f_2(x, y) = e^x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

La funzione vettoriale è $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 4, e^x + y - 1)$.

Passo 2: Calcolare la matrice Jacobiana

La matrice Jacobiana è formata dalle derivate parziali:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 3: Applicare la formula iterativa di Newton

La formula iterativa è:

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k)$$

dove $x_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$.

Passo 4: Eseguire le iterazioni

- Iterazione 1:** Scegliere un punto iniziale, ad esempio $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Calcolare $F(x_0)$:

$$F(1, 1) = \begin{pmatrix} 1^2 + 1^2 - 4 \\ e^1 + 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ e \end{pmatrix} \quad \text{Calcolare } J(x_0)$$

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ e & 1 \end{pmatrix}$$

$$J(1, 1)^{-1} = \frac{1}{2 - 2e} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -e & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Calcolare } J(x_k)^{-1}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2 - 2e} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -e & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2 - 2e} \begin{pmatrix} -2 + 2e \\ -2e + 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.34 \\ 0.73 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 2:** Calcolare x_2 utilizzando x_1 come punto di partenza. Ripetere il processo fino a quando la differenza tra x_{k+1} e x_k è inferiore a una tolleranza prestabilita.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$



Sistema non lineare - Wikipedia

In matematica un sistema non lineare (talvolta nonlineare) è un sistema di equazioni in cui almeno una di esse è non lineare, cioè...

Wikipedia

Approfondisci in AI Mode

Le risposte dell'AI potrebbero contenere errori.



Algoritmo Newton-Raphson per sistemi di equazioni non lineari

28 mag 2016 — Algoritmo Newton-Raphson per sistemi di equazioni non lineari: iterazione base
Criterio di convergenza ai residui/ai disequilibri nodali.

YouTube · Fex Math - Federico Sangalli

Oltre 4010 visualizzazioni · 5 anni fa

#ESERCITAZIONE Sistemi non Lineari

Ciao ragazzi! In questo mercoledi di pioggia facciamo un po' di esercizi sui
Sistemi non Lineari. Se avete qualche dubbio non fatevi ...

Mancanti: newton | Deve includere: newton



<http://pagine.dm.unipi.it/libro/equazioni>

Capitolo 4 Equazioni e sistemi non lineari

Una classe di metodi, mutuati dal metodo di Newton-Raphson e che possono essere interpretati come
una estensione del metodo delle secanti in IRⁿ, si ottiene ...

Mancanti: svolti | Deve includere: svolti

Ricerche correlate

Metodo di Newton dimostrazione

Metodo di Broyden

Metodo delle tangenti dimostrazione

Metodo delle approssimazioni successive

Alcuni risultati possono essere stati rimossi nell'ambito della normativa europea sulla protezione dei dati. Ulteriori informazioni

Avanti

Italia Bergamo - Dal tuo indirizzo IP - Aggiorna posizione
Invia feedback Privacy Termini Guida