

MATEMATICA PER L'ECONOMIA LEZ. 7^o

EQUAZ. DIFFERENZIALI

LU 27/10/25

EQ. DIFF. DI ORDINE n E'

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

x INCOGNITA (LA VARIABILE INDIP.)

$y(x)$ FUNZ. INCOGNITA

$y', \dots, y^{(n)}$

"

"

EQ. DIFF. 1^o ORDINE

SIGNIFICA TROVARE

ES. $y' = y$

$y = f(x)$ LA CUI DERIVATA È SÉ

STESSA $\Rightarrow y = e^x, y' = e^x$

$\Rightarrow y^* = e^x$ e ANCHE $y^* = c e^x$

$c \in \mathbb{R}$.

PB DETER. L'ANDAMENTO DI UNA POPO-
LAZIONE CHE SI EVOLVE CON
UN TASSO DI CRESCITA COST. = 1

$$\uparrow \frac{P'(t)}{P(t)} = 1$$

①

ES.

SE LO SPOSTAMENTO DI UN CORPO LUNGO UNA TRAIETTORIA È DESCRITTO DA $s = s(t)$ E IL MOTO È $v(t) - a(t) = 0$

$\Rightarrow$ SO CHE $v(t) = s'(t)$ E $a(t) = s''(t)$ ALLORA

EQ. DIFFERENZ. È

$$\underline{s'(t) = s''(t)}$$

2° ORDINE

CAMBIO VAR. $v(t) = s'(t)$

$\Rightarrow \underline{v'} = \underline{v} \Rightarrow$ SOLUZ.

$v(t) = c e^t \Rightarrow$ RISOLVO

$s'(t) = c e^t \Rightarrow$

$$s(t) = \int c e^t dt = c e^t + d$$

dove $c, d \in \mathbb{R}$

"L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI UN'EQ. DIFF. È COSTITUITO DA UNA INFINITA' DI FUNZIONI CORRISPONDENTI AI VALORI ARBITRARI DI 1 O PIU' COSTANTI"

(2)

- ① EQ. DIFF. ORDINARIA (E.D.O.)
- ② SISTEMA DI EQ. DIFF. ORD.
- ③ EQ. DIFF. ALLE DERIV. PARZIALI
- ④ SISTEMA DI EQ. DIFF. ALLE DER. PARZ.

① $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

→ SOLUZ. GENERALE $y^*(x) = f(x, c_1, \dots, c_n)$
 $c_i \in \mathbb{R}$

SOLUZ. PARTIC. $\bar{y}(x) = g(x)$

ES. $y'(x) = f(x) \implies$ INTEGRALE

GENERALE È $y^*(x) = \int f(x) dx =$
 $= F(x) + C$

↗ UNA PRIMITIVA

$$y'(x) = 2x$$

$$y^*(x) = \int 2x dx = x \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$\bar{y}(x) = x^2 + 5$$

③

ES.

$$y' = 2\sqrt{y} \Rightarrow \text{SOLUZ.}$$

$$y^*(x) = (x+c)^2 \quad \text{INFATTI}$$

$$y^{*'}(x) = 2(x+c) = 2\sqrt{y}$$

$$\text{SE } y \geq 0 \text{ E } y' \geq 0$$

$$\text{ALLORA } x+c \geq 0 \text{ CIOÈ } x \geq -c$$

ATTENZIONE: ANCHE $y(x) = 0$ È
SOLUZIONE DELLA E.D.O. MA NON
SI RICAVALA COME INTEGRALE
PARTICOLARE, È UN INTEGRALE
SINGOLARE

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \end{cases} \quad 1^\circ \text{ ORDINE}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad 1 \text{ CONDIZ. INIZIALE}$$

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \end{cases} \quad 2^\circ \text{ ORDINE}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases} \quad 2 \text{ COND. INIZIALI}$$

$$\begin{cases} y'(x_0) = z_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \in \mathbb{R} \\ \nwarrow \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

④

ES. $y' = -\frac{x}{y}$

E.D.O. 1° ORDINE
A VARIAB. SEPARAB.

$$\Rightarrow y \cdot \frac{dy}{dx} = -x$$

$$y \cdot dy = -x dx$$

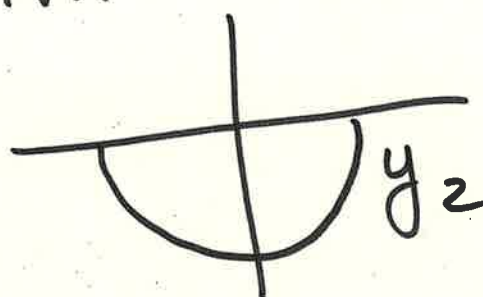
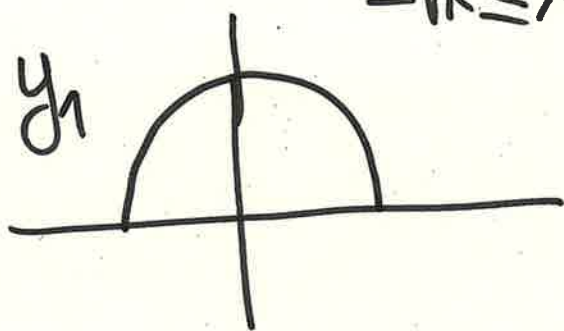
$$\int y dy = \int -x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = K \quad (K = 2C)$$

non si può esplicitare globalmente

ma $\exists y_1 = \sqrt{K - x^2} \quad \exists y_2 = -\sqrt{K - x^2}$
 $-\sqrt{K} \leq x \leq +\sqrt{K}$ $-\sqrt{K} \leq x \leq +\sqrt{K}$



ES.

$$x y' = y$$

E.D.O 1° ORDINE
A VAR. SEPARAB.

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{x}$$

$$y \neq 0, x \neq 0$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln y = \ln x + C$$

$$y^* = \cancel{\text{some}} e^{\ln x + C} = x \cdot K$$

SE LA CONDIZ. INIZ. È $y(0) = 0$

$$\Rightarrow y^*(0) = K \cdot 0 = 0 \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

$(0,0)$ È PUNTO SINGOLARE

ES. $y' = \frac{1}{(x-2)(y+1)}$

$x \neq 2$
 $y \neq -1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-2)(y+1)}$$

$$(y+1) dy = \frac{1}{x-2} dx$$

$$\int (y+1) dy = \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = \ln|x-2| + C$$

$$\Rightarrow x^*(y) = K e^{\frac{y^2}{2} + y + 2}$$

X IN FUNZIONE DI y

ESERCIZIO 1

a) $y(x) = c e^{x^2} - 1$ è soluz.? di $y' = 2(y+1)x$

$$y'(x) = \underline{c e^{x^2}} \cdot 2x = \underline{y(x)} \cdot 2x \quad \checkmark$$

b) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2$ è sol.? di $y'' + 2y' = 0$

$$y'(x) = c_1 \cdot e^{2x} \cdot 2 \Rightarrow 4c_1 e^{2x} + 4c_1 e^{2x} \neq 0$$

$$y''(x) = 2c_1 e^{2x} \cdot 2$$

No

(7)

$$c) y(x) = e^{-x} - x e^{-x} + 2e^x + 1 - x$$

$$y''' + y'' - y' - y = x$$

$$y' = -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} + 2e^x - 1$$

$$y'' = e^{-x} + e^{-x} + e^{-x} + x e^{-x}(-1) + 2e^x$$

$$y''' = -e^{-x} - e^{-x} - e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} + 2e^x$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -4e^{-x} + x e^{-x} + 2e^x + 3e^{-x} - x e^{-x} \\ + 2e^x - 2e^{-x} + x e^{-x} + 2e^x - 1 + \\ + e^{-x} - x e^{-x} + 2e^x + 1 - x = \\ -2e^{-x} + 8e^x - x \end{array}$$

(No) SEGNI

$$y' = -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} + 2e^x - 1$$

$$y'' = +2e^{-x} + e^{-x} - x e^{-x} + 2e^x$$

$$y''' = -3e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} + 2e^x$$

~~AAAAAAAA~~

$$\begin{array}{r} -3e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} + 2e^x + 3e^{-x} - \\ - x e^{-x} + 2e^x + 2e^{-x} - x e^{-x} - 2e^x + \\ - e^{-x} + x e^{-x} - 2e^x + 1 + x = x \end{array}$$

OK ✓ (8)

ESERCIZIO 3

E.D.O. A VAR.
SEPARABILI

$$y'(y^2 - 1) = x$$

$$(y^2 - 1) dy = x dx$$

$$\int (y^2 - 1) dy = \int x dx$$

$$\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^2}{2} + C$$

IMPOSSIBILE RICAVARE $y = y(x)$

$$0 \quad x = x(y)$$

DET. PER QUALI PUNTI PASSA SICU-
RAMENTE UNA ED UNA SOLA CURVA
INTEGRALE

$$\forall (x_0, y_0) \text{ CON } y_0 \neq 1 \quad y_0 \neq -1$$

ES. 4

$$a) y' - \frac{y}{x} = x^2$$

NON È A VARIAB.
SEPARABILI → DOPO

$$b) y' = \sqrt{y}$$

VEDI PAG. 4

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}x + C$$

$$y = \left(\frac{1}{2}x + C\right)^2$$

⑨

$$c) y' = \frac{x}{y+1}$$

$$(y+1) dy = x dx$$

$$\int (y+1) dy = \int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - y + C = 0 \quad \text{IPERBOLE}$$

NON SI PUO' RICAVARE $y(x)$ NE
 $x(y)$

ES. 5

$$a) y' = \frac{1}{y} \Rightarrow y dy = dx \Rightarrow$$

$$\int y dy = \int dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x + C$$

$$b) x y' = -y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| =$$

$$= -\ln|x| + C \Rightarrow y = \frac{1}{x} \cdot K$$

$$c) y' = \frac{1}{x \sqrt{y}}$$

INTEGRALI

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

$$m \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx$$

$$\int \log x dx = x \log x - x$$